

426/68  
POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM VII - ZESZYT 4

kwartalnik

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1958

## SPIS TREŚCI

|  |            |
|--|------------|
| Z. Kowalski: Przedstawienie maszyn synchronicznych i elementów sieci trójfazowej trójprzewodowej w układzie składowych symetrycznych grupowych . . . . . | 561        |
| Z. Kowalski: Oporności elektroenergetycznych linii typu „cztery przewody - ziemia” w układzie składowych symetrycznych grupowych . . . . .               | 599        |
| R. Suwalski: Obliczenie elektrycznego układu zastępczego obciążonego prętowego przetwornika magnetostrykcyjnego . . . . .                                | 647        |
| S. Kuliński: Czas narastania i przepięcia przebiegów nieustalonych w falowodach . . . . .  | 669        |
| J. Osiowski: Praca wzmacniacza rezonansowego klasy C z rozstrojonym obwodem anodowym . . . . .   | 693        |
| <b>Komunikaty . . . . .</b>  | <b>723</b> |

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |            |
|--|------------|
| 3. Ковальски: Представление синхронных машин и элементов трехфазных трехпроводных сети в системе симметричных групповых составляющих . . . . . | 561        |
| 3. Ковальски: Сопротивление электроэнергетических линий «четыре провода — земля» (ЧПЗ) в системе симметричных групповых составляющих . . . . . | 599        |
| Р. Сувальски: Расчет электрической системы замещающей нагруженный стержневой магнитострикционный преобразователь . . . . .                     | 647        |
| Ст. Кулински: Время установления и перенапряжения нестационарных процессов в волноводах . . . . .  | 669        |
| Е. Осёвски: Работа резонансного усилителя класса С с расстроенным анодным контуром . . . . .   | 693        |
| <b>Сообщения . . . . .</b>   | <b>723</b> |

## CONTENTS-SOMMAIRE

|  |            |
|--|------------|
| Z. Kowalski: Representation of synchronic machines and elements of three-phase three-wire power line in system of group symmetrical components . . . . . | 561        |
| Z. Kowalski: Impedances of electric power lines “four wire-ground” type in the system of group symmetrical components . . . . .                          | 599        |
| R. Suwalski: Calculation of electric equivalent circuit of loaded bar-type magnetostrictive transducer . . . . .   | 647        |
| S. Kuliński: Transient time and surge voltage of the transients phenomena in waveguides . . . . .  | 669        |
| J. Osiowski: Class C resonance amplifier with untuned anode circuit . . . . .  | 693        |
| <b>Communiqués . . . . .</b>   | <b>723</b> |

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM VII · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1958

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,  
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. STANISŁAW SZPOR,  
PROF. PAWEŁ SZULKIN

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

*Redaktor Naczelny*

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

*Z-ca Redaktora Naczelnego*

PROF. PAWEŁ NOWACKI

*Sekretarz*

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

PRINTED IN POLAND

COPYRIGHT BY  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1958

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,  
Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04 lub 8.87.40  
Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism  
Warszawa, Miodowa 10

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| Nakład 830 + 120 egz.                     | Do składania 16 X 1958        |
| Ark. wyd. 13,5, druk. 11,5 + 1 wkł.       | Podpisano do druku 10 II 1959 |
| Papier druk. sat. 70 g IV kl. 70 × 100/16 | Druk ukończ. w lutym 1959     |
| Cena zł 30,—                              | F-8 - Zamówienie 675/93       |

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10

621.317.353.2:621.313.32:621.316.1

Z. KOWALSKI

## Przedstawienie maszyn synchronicznych i elementów sieci trójfazowych trójprzewodowych w układzie składowych symetrycznych grupowych

*Rękopis dostarczono 17. 2. 1958*

Przedstawiono metody obliczeń oporności zastępczych oraz podano zastępcze schematy maszyn synchronicznych i elementów sieci trójfazowych, trójprzewodowych, współpracujących z sieciami typu *cztery przewody — ziemia* (CPZ) w układzie składowych symetrycznych grupowych.

Po omówieniu niektórych własności sieci CPZ podano podstawowe zależności pozwalające na rozkład wielkości fazowych w sieci CPZ na składowe grupowe i odwrotnie, jak również wzory ogólne na składowe grupowe strat napięcia na dowolnym elemencie układu elektroenergetycznego, przez który płyną składowe symetryczne grupowe prądów wszystkich kolejności. Wzory te znacznie się upraszczają, jeżeli elementy układu są symetryczne dla składowych grupowych.

Wyprowadzono podstawowe związki między składowymi symetrycznymi trójfazowymi sił elektromotorycznymi, napięć i prądów trójfazowej maszyny synchronicznej i składowymi grupowymi tych wielkości sprowadzonych na poziom sieci CPZ. W oparciu o te zależności otrzymano równania, wiążące siły elektromotoryczne, napięcia, prądy i oporności zastępcze maszyny synchronicznej w układzie składowych grupowych. Omówiono zagadnienie transformacji składowych grupowych i przedstawiono zasady sprowadzenia wielkości w układzie składowych grupowych na poziom sieci CPZ.

Podano wzory pozwalające obliczyć SEM-ne maszyny synchronicznej w układzie składowych grupowych w zależności od składowej symetrycznej trójfazowej zgodnej SEM-nych maszyny oraz zależności na zastępcze oporności maszyn synchronicznych w układzie składowych grupowych w funkcji oporności dla składowych symetrycznych trójfazowych zgodnej i przeciwniej. Omówiono krótko niektóre własności zastępczych maszyn synchronicznych w układzie składowych grupowych i podano zastępcze schematy oporowe maszyn synchronicznych w układzie składowych grupowych.

W oparciu o rozważania i ich wyniki podano dalej zależności na oporności zastępcze symetrycznych elementów sieci trójfazowych trójprzewodowych w układzie składowych grupowych. Załączono oporowe schematy zastępcze tych elementów w układzie składowych grupowych, przy czym dla linii elektroenergetycznych uwzględniono przewodności poprzeczne. Podano

przy tym zasady obliczania i przeliczania przewodności elementów sieci w układzie składowych grupowych.

W zakończeniu omówiono pokrótkie niektóre zagadnienia związane z zastosowaniem otrzymanych w pracy wyników.

### 1. WSTĘP

Składowe symetryczne grupowe znalazły zastosowanie do obliczeń prądów i napięć w układach elektroenergetycznych w przypadku błędów w sieciach typu *cztery przewody — ziemia* (w skrócie: CPZ). Przesłanki teorii składowych symetrycznych grupowych, jak również w zarysie niektóre zastosowania teorii składowych grupowych do obliczeń stanów zakłóceniowych w sieciach typu CPZ podał Ebin [1].

Stosowanie metody składowych symetrycznych grupowych, zwanych tu krótko *składowymi grupowymi*, wymaga znajomości obliczeń zastępczych oporności elementów układu elektroenergetycznego, w którym pracują sieci typu CPZ dla składowych grupowych.

Zależności na oporności zastępcze transformatorów pracujących w sieciach typu CPZ dla składowych grupowych opublikowano w [2]. Zagadnienie obliczania oporności zastępczych linii typu CPZ dla składowych grupowych było tematem oddzielnego publikacji [3], [4].

Celem niniejszej pracy jest próba podania sposobów przedstawiania maszyn synchronicznych i elementów sieci trójfazowych trójprzewodowych oraz podania metody obliczeń zastępczych oporności maszyn synchronicznych i elementów sieci trójfazowych trójprzewodowych w układzie składowych symetrycznych grupowych.

Założono ogólnie, że napięcia i prądy w układzie elektroenergetycznym zawierają tylko harmoniczną podstawową, wszystkie elementy zaś układu są elementami liniowymi.

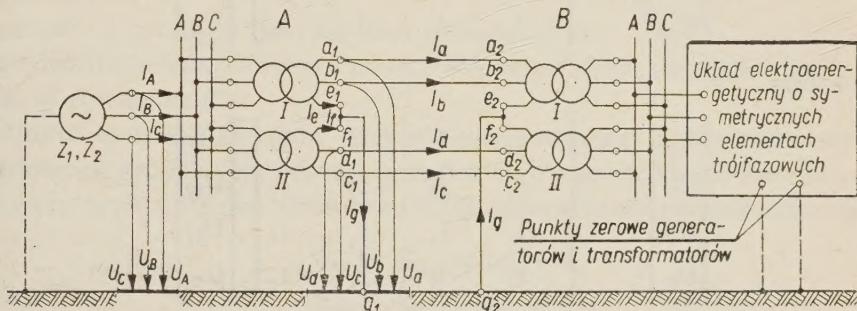
### 2. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE DLA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH

Na rys. 1 pokazano schemat układu przesyłowego typu CPZ połączonego poprzez transformatory z jednej strony z maszyną synchroniczną, z drugiej — z układem elektroenergetycznym o symetrycznych elementach trójfazowych.

Na każdej stacji A i B znajduje się co najmniej jedna para takich samych transformatorów, przy czym grupy połączeń tych transformatorów różnią się między sobą o 180 stopni elektrycznych. Skutkiem takiego doboru transformatorów jest to, że przez ziemię jako przez przewód linii CPZ nie płynie prąd powrotny w warunkach normalnej pracy lub prąd ten jest tak mały, że może być pominięty w obliczeniach praktycznych.

Linia typu CPZ składa się z dwóch zasadniczych części (torów): z dwóch linii typu dwa przewody ziemia (DPZ) o specyficznych własnościach.

Linię typu CPZ pod względem jej obliczeń elektrycznych można traktować jako linię czterofazową przyjmując ziemię pod linią CPZ (na przy-



Rys. 1. Schemat fragmentu układu elektroenergetycznego z linią typu CPZ.

kład w obszarze najmniej odległym od osi przewodów linii) za układ odniesienia napięć faz nieuziemionych linii [4].

Prądy w fazach nieuziemionych linii (fazy:  $a, b, c$  i  $d$ ) nazywają się prądami fazowymi linii CPZ, a napięcia faz nieuziemionych w stosunku do ziemi — napięciami fazowymi doziemnymi, lub krócej (umownie) — napięciami fazowymi linii. Napięcia te oznaczać będziemy przez  $U_a, U_b, U_c$  i  $U_d$ <sup>1</sup>, prądy fazowe zaś — przez  $I_a, I_b, I_c$ , i  $I_d$ .

Prądy i napięcia fazowe w linii typu CPZ można rozłożyć na tzw. składowe symetryczne grupowe czterofazowe kolejności 01, 00, 11 i 10 [1], [4].

W odniesieniu do prądów składowe te spełniają następujące równanie:

$$\begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1, \\ 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & -1, & -1, & 1, \\ 1, & -1, & 1, & -1, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Odwrotnie:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 1, & -1, & -1, \\ -1, & 1, & -1, & 1, \\ -1, & 1, & 1, & -1, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Zastosowane w pracy symbole do oznaczania wielkości elektrycznych są liczbami zespolonymi.

Podobnie dla napięć

$$\begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{00} \\ U_{11} \\ U_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1, \\ 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & -1, & -1, & 1, \\ 1, & -1, & 1, & -1, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{bmatrix} \quad (3)$$

i odwrotnie

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 1, & -1, & -1, \\ -1, & 1, & -1, & 1, \\ -1, & 1, & 1, & -1, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{01} \\ U_{00} \\ U_{11} \\ U_{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

W równaniach (1)  $\div$  (4) oznaczają (poza oznaczeniami już podanymi):

$I_{01}$ ,  $I_{00}$ ,  $I_{11}$  i  $I_{10}$  — składowe symetryczne grupowe (krótko: składowe grupowe) prądów kolejności odpowiednio 01, 00, 11 i 10, w fazie a (podstawowej) w układzie składowych symetrycznych grupowych;

$U_{01}$ ,  $U_{00}$ ,  $U_{11}$  i  $U_{10}$  — składowe grupowe napięć kolejności odpowiednio 01, 00, 11 i 10 w fazie podstawowej.

Z równania (2) widać, w jaki sposób składowe grupowe prądów w fazach b, c, d zależą od składowych grupowych prądów w fazie a, jako fazie podstawowej. Podobnie na podstawie równania (4) można ustalić zależności składowych grupowych napięć w fazach b, c i d od składowych grupowych napięć w fazie podstawowej.

Dla elementu niesymetrycznego (obwodu niesymetrycznego), przez który płyną składowe grupowe prądów  $I_{01}$ ,  $I_{00}$ ,  $I_{11}$  i  $I_{10}$ , spełnione są następujące ogólne zależności na składowe grupowe strat napięcia na tym elemencie, wywołane przez wymienione składowe grupowe prądów [3], [4]:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{01_{01}}, & Z_{01_{00}}, & Z_{01_{11}}, & Z_{01_{10}} \\ Z_{00_{01}}, & Z_{00_{00}}, & Z_{00_{11}}, & Z_{00_{10}} \\ Z_{11_{01}}, & Z_{11_{00}}, & Z_{11_{11}}, & Z_{11_{10}} \\ Z_{10_{01}}, & Z_{10_{00}}, & Z_{10_{11}}, & Z_{10_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Oporność  $Z_{01_{11}}$  nazywa się opornością zastępczą elementu (lub całego obwodu) dla składowych grupowych napięcia kolejności 01 i prądu kolejności 11.

Oporność  $Z_{11_{01}}$  nazywa się opornością zastępczą elementu (lub całego

obwodu) dla składowych grupowych napięcia kolejności 11 i prądu kolejności 01.

Oporność  $Z_{0101} = Z_{01}$  nazywa się opornością zastępczą elementu (lub całego obwodu) dla składowych grupowych kolejności 01 napięcia i prądu lub krótko: opornością elementu (obwodu) dla składowej grupowej kolejności 01.

Oporność  $Z_{1111} = Z_{11}$  — jak  $Z_{01}$  lecz kolejności 11.

Podobnie można utworzyć nazwy dla pozostałych oporności wymienionych w równaniu (7).

Jeżeli elementy układu elektroenergetycznego są symetryczne dla składowych grupowych, jak np. transformatory pracujące w układzie przesyłowym typu CPZ lub linie typu CPZ odpowiednio przepłcone, wtedy

$$\begin{aligned} Z_{0100} &= Z_{0111} = Z_{0110} = 0 \\ Z_{0001} &= Z_{0011} = Z_{0010} = 0 \\ Z_{1101} &= Z_{1100} = Z_{1110} = 0 \\ Z_{1001} &= Z_{1000} = Z_{1011} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

W tym przypadku:

$$\begin{aligned} \Delta U_{01} &= Z_{0101} I_{01} = Z_{01} I_{01} \\ \Delta U_{00} &= Z_{0000} I_{00} = Z_{00} I_{00} \\ \Delta U_{11} &= Z_{1111} I_{11} = Z_{11} I_{11} \\ \Delta U_{10} &= Z_{1010} I_{10} = Z_{10} I_{10}. \end{aligned} \tag{7}$$

Innymi słowy, w odniesieniu do symetrycznych elementów sieci dla składowych grupowych, składowe grupowe strat napięcia zależą tylko od jednakoimiennych składowych grupowych prądów. Odwrotnie, jeżeli dla elementu spełnione są równania (7), element taki jest elementem symetrycznym dla składowych grupowych.

### 3. PRZEDSTAWIENIE MASZYN SYNCHRONICZNYCH W UKŁADZIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH

Analizując stany pracy sieci typu CPZ, a w szczególności stany zakłócenioowe (zwarcia, przerwy w fazach) metodą składowych grupowych, należy znać schematy i oporności zastępcze dla składowych grupowych wszystkich tych elementów układu elektroenergetycznego, które związane są pośrednio lub za pośrednictwem transformatorów z siecią typu CPZ.

Powstaje pytanie, jak należy przedstawić maszyny synchroniczne i elementy sieci trójfazowych trójprzewodowych i jak obliczać ich zastępcze

oporności w układzie składowych grupowych. Intencją autora jest podanie odpowiedzi na to pytanie.

Dla osiągnięcia przedstawionego celu pracy obrano następującą drogę:

1. znaleziono związki między składowymi symetrycznymi trójfazowymi napięć i prądów po stronie sieci normalnej, zależnymi tylko od składowych grupowych napięć i prądów z jednej strony i składowymi grupowymi napięć i prądów sprowadzonych na poziom sieci typu CPZ — z drugiej strony;
2. w oparciu o rezultaty punktu 1 znaleziono związki między składowymi grupowymi napięć i prądów sprowadzonych na poziom sieci CPZ.

W ten sposób składowe grupowe określonych wielkości maszyn synchronicznych i elementów sieci normalnej, sprowadzonych na poziom sieci CPZ, uzależniono od składowych symetrycznych trójfazowych tych wielkości. W szczególności składowe grupowe SEM-nych maszyn synchronicznych sprowadzonych na poziom sieci CPZ wyrażono w funkcji składowych symetrycznych trójfazowych SEM-nych tych maszyn, oporności zaś maszyn synchronicznych i elementów sieci normalnej w układzie składowych grupowych — odpowiednio w funkcji oporności tych maszyn i elementów sieci normalnej dla składowych symetrycznych trójfazowych.

Metoda, którą obrano w pracy, wydaje się być uzasadniona tym, że sposób obliczania oporności zastępczych elementów sieci normalnych dla składowych symetrycznych trójfazowych jest powszechnie znany, w odniesieniu zaś do maszyn synchronicznych znane są ich własności dla składowych symetrycznych trójfazowych, a ich oporności zastępcze dla tych składowych są podawane przez wytwórców lub są wyznaczone drogą pomiarów i obliczeń.

### 3.1. Określenia i założenia wstępne

Zakładamy, że symetryczne trójfazowe maszyny synchroniczne (generatory, kompensatory) nie są połączone galwanicznie z elementami sieci typu CPZ.

Budowane maszyny synchroniczne nie są dostosowane do pracy z fazą normalnie uziemioną. Poza tym maszyny połączone galwanicznie z siecią typu CPZ musiałyby tworzyć pary w ten sposób, aby jednostka każdej pary była źródłem przeciwsobnego układu prądów w porównaniu z układem prądów jednostki, z którą tworzy parę. Ze względu na izolację uzwojeń i konstrukcję maszyn spełnienie tego warunku może być niemożliwe.

Sieci trójfazowe trójprzewodowe, zwane tu sieciami normalnymi, sprzęgnięte są z sieciami typu CPZ za pośrednictwem transformatorów.

Czterofazowe układy napięć i prądów fazowych w sieci typu CPZ mogą być rozłożone na cztery składowe czterofazowe układy symetryczne kolejności 01, 00, 11 i 10, zgodnie z podanymi w części 2 pracy zasadami. W sy-

metrycznej linii typu CPZ układy te występują niezależnie. Układy fazowe są superpozycją składowych układów symetrycznych. Każdy składowy układ symetryczny można rozpatrywać oddzielnie. Prądy fazowe każdego z tych składowych układów symetrycznych występują w fazach  $a, b, c$  i  $d$ , będących odpowiednikiem faz  $a, b, c$  i  $d$  sieci typu CPZ. Z interpretacji matematyczno-fizycznej składowych symetrycznych wynika, że wielkości fazowe składowych układów symetrycznych występują w fazach sieci, czyli tu w fazach sieci typu CPZ. Prądy każdego ze składowych układów symetrycznych płyną więc w fazach transformatorów galwanicznie połączonych z liniami typu CPZ. A zatem prądy te (składowe symetryczne grupowe prądów) są transformowane na stronę sieci normalnych. Z tego znowu wynikałoby pozornie, że składowe symetryczne grupowe prądów występują w fazach sieci normalnej (trójfazowej trójprzewodowej). Układ prądów fazowych w sieci normalnej jest układem trójfazowym. Zatem układu tego nie można rozłożyć na czterofazowe składowe układy symetryczne. Stąd więc wynika, że w sieci normalnej nie ma składowych symetrycznych grupowych.

Sensy zdań podkreślonych są sprzeczne. Sens zdania ostatniego jest oczywisty. Nieścisłość myśli zawartej w zdaniu pierwszym polega na tym, że nie można w ogóle mówić o składowych symetrycznych grupowych prądów w fazach sieci normalnej, a jedynie o tych składowych prądów fazowych w tej sieci, które to składowe są wywołane przez składowe grupowe prądów w fazach sieci typu CPZ drogą transformacji.

Składowe te nazwiemy tu składowymi prądów fazowych w sieci normalnej proporcjonalnymi do składowych grupowych prądów w sieci typu CPZ lub krótko — składowymi grupowymi przetransformowanymi prądów.

Ogólnie biorąc, prądy fazowe w sieci normalnej są sumą nie tylko składowych grupowych prądów przetransformowanych, lecz i innych składowych prądów, które nie są transformowane na stronę sieci CPZ. Składowymi, które nie są transformowane do sieci typu CPZ są składowe symetryczne (trójfazowe) kolejności zerowej ( $I_0$ ). Wobec izolowanego punktu zerowego transformatorów po stronie sieci CPZ, składowe symetryczne trójfazowe zerowe prądów nie mogą istnieć w sieci typu CPZ.

Możemy więc prądy fazowe w sieci normalnej wyrazić w następujący ogólny sposób:

$$\begin{aligned} I_A &= (I_{A_{01}} + I_{A_{00}} + I_{A_{11}} + I_{A_{10}}) + I_0 \\ I_B &= (I_{B_{01}} + I_{B_{00}} + I_{B_{11}} + I_{B_{10}}) + I_0 \\ I_C &= (I_{C_{01}} + I_{C_{00}} + I_{C_{11}} + I_{C_{10}}) + I_0 \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie

$I_A, I_B$  i  $I_C$  — prądy fazowe w fazach  $A, B$  i  $C$  sieci normalnej,  
 $I_{A_{mn}}, I_{B_{mn}}, I_{C_{mn}}$  — składowe grupowe przetransformowane prądów w fazach odpowiednio  $A, B$  i  $C$  sieci normalnej, kolejności  $mn$  ( $m=0$  i  $1$ ,  $n=0$  i  $1$ ),  
 $I_0$  — składowa symetryczna trójfazowa prądów kolejności zerowej w sieci normalnej.

Oczywiście składowe grupowe przetransformowane są proporcjonalne do składowych grupowych w sieci CPZ, tj.

$$\left. \begin{array}{l} I_{A_{mn}} = k_{A_{mn}} I_{mn} \\ I_{B_{mn}} = k_{B_{mn}} I_{mn} \\ I_{C_{mn}} = k_{C_{mn}} I_{mn} \end{array} \right\} \quad (9)$$

przy czym:  $k_{A_{mn}}, k_{B_{mn}}, k_{C_{mn}}$  — współczynniki zależne od przekładni, układu i grupy połączeń transformatorów sprzągających sieci typu CPZ i normalną.

$I_{mn}$  — składowe grupowe prądów w sieci CPZ kolejności  $mn$ .

Ponieważ jednakojmienne zaciski transformatorów po stronie sieci normalnej są ze sobą połączone galwanicznie (przy czym elementami łączącymi są szyny zbiorcze lub przewody, lub jedne i drugie), składowe grupowe przetransformowane prądów mogą płynąć w fazach sieci normalnej (składowe 01 i 11) lub tylko przez szyny zbiorcze i przewody łączące jednakojmienne zaciski transformatorów (składowe 10 i 00).

W fazach sieci normalnej (w liniach transformatorach na stacjach normalnych, generatorach) będą płynąć tylko te składowe grupowe przetransformowane prądów, których odpowiadające składowe grupowe prądów po stronie sieci CPZ spełniają zależności

$$\left. \begin{array}{l} I_{C_{mn}} = -I_{A_{mn}} \\ I_{A_{mn}} = -I_{B_{mn}} \end{array} \right\} \quad (10)$$

bowiem ze względu na różnicę grup połączeń transformatorów, wynoszącą  $180^\circ$ , jedna ze składowych w grupach faz  $a$  i  $c$  ( $I_{C_{mn}}$ ) oraz  $b$  i  $d$  ( $I_{A_{mn}}$ ) zmieni znak na przeciwny.

Mając na uwadze zależności (2), równania (10) spełnione są tylko dla składowych grupowych prądów kolejności 01 i 11, tj.

$$\left. \begin{array}{l} I_{C_{01}} = -I_{A_{01}} \\ I_{A_{01}} = -I_{B_{01}} \end{array} \right\} \quad (11)$$

oraz

$$\left. \begin{array}{l} I_{c11} = -I_{a11} \\ I_{a11} = -I_{b11} \end{array} \right\} \quad (12)$$

A zatem w stanie normalnej pracy układu elektroenergetycznego lub przy błędach w sieci typu CPZ w fazach sieci normalnej przepływają tylko składowe grupowe przetransformowane prądów kolejności 01 i 11.

Składowe symetryczne grupowe prądów kolejności 00 i 10 nie płyną w fazach (A, B, C) sieci normalnej. Składowe kolejności 00 i 10 mogą płynąć po stronie sieci normalnej tylko w szynach zbiorczych i przewodach łączących zaciski transformatorów tej samej fazy, o czym obszerniejsz napisano w pracy [2].

Po stronie sieci normalnej nie występują też składowe napięć proporcjonalne do składowych grupowych napięć w sieci CPZ kolejności 00 i 10.

Jeżeli układy prądów w obu częściach linii (sieci) typu CPZ są symetryczne, tj. jeżeli prawdziwe są równania

$$\left. \begin{array}{l} I_a = I_a \\ I_b = a^2 I_a \\ I_c = a I_a \end{array} \right\} \quad (13)$$

oraz

$$\left. \begin{array}{l} I_c = I_c = -I_a \\ I_d = a^2 I_c = -I_b \\ I_f = a I_c = -I_e \end{array} \right\} \quad (14)$$

$$\text{przy czym } a = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2},$$

wtedy składowe grupowe prądów po stronie sieci CPZ są równe:

$$\left. \begin{array}{l} I_{01} = \frac{1}{4} (I_a + I_b - I_c - I_d) = \frac{1}{2} (1 + a^2) I_a \\ I_{11} = \frac{1}{4} (I_a - I_b - I_c + I_d) = \frac{1}{2} (1 - a^2) I_a \\ I_{00} = \frac{1}{4} (I_a + I_b + I_c + I_d) = 0 \\ I_{10} = \frac{1}{4} (I_a - I_b + I_c - I_d) = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Równania (13) i (14), a zatem i (15), są spełnione przy normalnej pracy układu elektroenergetycznego, jeżeli wszystkie jego elementy (odbiory, źródła prądu, elementy sieci normalnych, układy przesyłowe typu CPZ) są symetryczne.

Składowe grupowe prądów kolejności 00 i 10 nie płyną więc w sieci typu CPZ przy pracy normalnej. Pojawiają się przy niektórych błędach (zwarcia, przerwy w fazach) w sieci typu CPZ. Mówią się więc potocznie, że źródłem składowych grupowych prądów i napięć kolejności 00 i 10 są same błędy w sieciach CPZ.

Składowe grupowe prądów kolejności 00 i 10 są równe lub proporcjonalne do składowych grupowych prądów kolejności 01 i 11.

Z powyższego wynika, że maszyny synchroniczne pracujące w sieciach normalnych są źródłami składowych grupowych przetransformowanych prądów i proporcjonalnych do nich składowych grupowych prądów kolejności 01 i 11 zarówno w stanie pracy normalnej, jak i przy błędach w sieci typu CPZ. Źródła prądu w sieciach normalnych są również pośrednio źródłami składowych grupowych prądów kolejności 00 i 10, lecz składowe przetransformowane prądów kolejności 00 i 10 nie płyną przez te źródła.

Wobec powyższego, niezależnie od stanu pracy w sieci CPZ,

$$\left. \begin{array}{l} I_{A_{00}} = 0, \quad I_{A_{10}} = 0 \\ I_{B_{00}} = 0, \quad I_{B_{10}} = 0 \\ I_{C_{00}} = 0, \quad I_{C_{10}} = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

Zatem

$$\left. \begin{array}{l} I_A = (I_{A_{01}} + I_{A_{11}}) + I_0 = I_{A_{gr}} + I_0 \\ I_B = (I_{B_{01}} + I_{B_{11}}) + I_0 = I_{B_{gr}} + I_0 \\ I_C = (I_{C_{01}} + I_{C_{11}}) + I_0 = I_{C_{gr}} + I_0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

przy czym  $I_{A_{gr}}$ ,  $I_{B_{gr}}$ ,  $I_{C_{gr}}$  — składowe prądów odpowiednio  $I_A$ ,  $I_B$  i  $I_C$  zależne tylko od składowych grupowych przetransformowanych prądów.

Założymy, że do szyn zbiorowych łączących jednakowimie zaciski transformatorów po stronie sieci normalnej przyłączona jest symetryczna trójfazowa maszyna synchroniczna, np. generator synchroniczny (rys. 1).

Generator ten charakteryzuje się symetrycznym układem SEM-nych  $E_A$ ,  $E_B$  i  $E_C$ , przy czym

$$\left. \begin{array}{l} E_A = E_1 \\ E_B = a^2 E_1 \\ E_C = a E_1 \end{array} \right\} \quad (18)$$

oraz opornościami dla składowych symetrycznych trójfazowych — zgodnej ( $Z_1$ ) przeciwej ( $Z_2$ ) i zerowej ( $Z_0$ ).

Symbol  $E_1$  we wzorach (18) oznacza składową zgodną SEM-nych generatora w fazie  $A$ , tj. w fazie podstawowej w układzie składowych symetrycznych trójfazowych.

Składowe symetryczne zerowe prądów mogą występować w sieci normalnej przy błędach w tej sieci. W pracy niniejszej przyjęto, że metoda składowych grupowych czterofazowych ma zastosowanie tylko do obliczeń napięć i prądów przy analizie stanów pracy w sieci typu CPZ, nie w sieci normalnej.

3.2. Związki między składowymi symetrycznymi grupowymi prądów i napięć w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci typu CPZ i składowymi symetrycznymi trójfazowymi w sieci normalnej.

Znajdźmy najpierw związki między składowymi grupowymi przekształcianymi prądów (i składowymi grupowymi prądów) z jednej strony i składowymi symetrycznymi prądów występujących w fazach sieci normalnej z drugiej.

Ogólnie związki te są następujące:

$$\left. \begin{array}{l} I_{A_{gr}} = I_{A_{01}} + I_{A_{11}} = I_{A_1} + I_{A_2} = I_1 + I_2 \\ I_{B_{gr}} = I_{B_{01}} + I_{B_{11}} = I_{B_1} + I_{B_2} = a^2 I_1 + a I_2 \\ I_{C_{gr}} = I_{C_{01}} + I_{C_{11}} = I_{C_1} + I_{C_2} = a I_1 + a^2 I_2 \end{array} \right\} \quad (19)$$

W dalszej części pracy zamiast prądów  $I_{A_{gr}}$ ,  $I_{B_{gr}}$ ,  $I_{C_{gr}}$  będziemy operować prądami  $I_A$ ,  $I_B$  i  $I_C$ , tj. założymy formalnie, że  $I_0 = 0$ . Prądy  $I_A$ ,  $I_B$  i  $I_C$  nazwiemy dla prostoty prądami fazowymi, nie zapominając o tym, że w przypadku gdy w sieci normalnej istnieją składowe symetryczne zerowe prądów, prądy te są tylko składowymi prądów fazowych, zależnymi od składowych symetrycznych kolejności zgodnej i przeciwej.

Prądy fazowe  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  nie zawierające składowej zerowej wypływające z zacisków rozważanego generatora i napięcia fazowe na jego zaciskach ( $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$ ) (rys. 1) możemy rozłożyć na składowe symetryczne trójfazowe. Otrzymamy

$$\begin{bmatrix} I_0 = 0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & a, & a^2 \\ 1, & a^2, & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad (20)$$

i odwrotnie

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & a^2, & a \\ 1, & a, & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 = 0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & a, & a^2 \\ 1, & a^2, & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} \quad (22)$$

i odwrotnie

$$\begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & a^2, & a \\ 1, & a, & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

gdzie:  $I_0, I_1, I_2$  — składowe symetryczne trójfazowe prądów fazowych  
 $I_A, I_B, I_C$  kolejności odpowiednio zerowej, zgodnej i przeciwej;

$U_0, U_1, U_2$  — składowe symetryczne trójfazowe napięć fazowych  
 $U_A, U_B, U_C$  kolejności odpowiednio zerowej, zgodnej i przeciwej na zaciskach generatora.

Składowe symetryczne trójfazowe napięcia spełniają następujące znane równania:

$$\begin{aligned} U_1 &= E_1 - Z_1 I_1 \\ U_2 &= 0 - Z_2 I_2 \\ U_0 &= 0 - Z_0 I_0 = 0 \end{aligned} \quad | \quad (24)$$

przy czym:  $E_1$  — składowa zgodna SEM-nych generatora (18),

$Z_1$  — oporność generatora dla składowej zgodnej,

$Z_2$  — „ „ „ „ „ przeciwej,

$Z_0$  — „ „ „ „ „ zerowej.

Wobec rozłożenia prądów fazowych  $I_A, I_B$  i  $I_C$  na składowe symetryczne trójfazowe, otrzymujemy po stronie generatora dwa symetryczne układy prądów.

Układ prądów kolejności zgodnej:

$$\left. \begin{aligned} I_{A_1} &= I_1 \\ I_{B_1} &= a^2 I_1 \\ I_{C_1} &= a I_1 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

układ prądów kolejności przeciwej:

$$\left. \begin{aligned} I_{A_2} &= I_2 \\ I_{B_2} &= a I_2 \\ I_{C_2} &= a^2 I_2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Każdy z tych układów jest transformowany na stronę sieci CPZ według ogólnie znanych prawideł.

Jeżeli  $\vartheta_1$  oznacza przekładnię transformatorów, to składowe prądów wymienione w równaniach (25) i (26), sprowadzone na stronę pierwotną transformatorów (sieci CPZ), będą ogólnie biorąc

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \frac{1}{\vartheta_1} I_1 e^{jH,30} \\ I'_2 &= \frac{1}{\vartheta_1} I_2 e^{-jH,30} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

gdzie  $H_1$  — grupa połączeń transformatorów.

Jak wymieniono na początku pracy, na każdej stacji w sieci CPZ istnieje para takich samych transformatorów różniących się tylko grupami połączeń, przy czym różnica między tymi grupami wynosi 6 godzin umownych (180 stopni elektrycznych).

Każdy z układów prądów — kolejności zgodnej (25) i kolejności przeciwej (26) jest transformowany na stronę CPZ w ten sposób, że na zaciskach transformatorów  $a_1, b_1, e_1$  jednego toru i  $c_1, d_1$  i  $f_1$  — drugiego toru linii CPZ otrzymamy następujące układy prądów.

a. Układy kolejności zgodnej —

$$\left. \begin{aligned} \text{tor 1:} \quad I_{a_1} &= k'_1 \frac{1}{\vartheta_1} I_{A_1} e^{jH,30} \\ I_{b_1} &= k'_1 \frac{1}{\vartheta_1} I_{B_1} e^{jH,30} \\ I_{e_1} &= k'_1 \frac{1}{\vartheta_1} I_{C_1} e^{jH,30} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{tor 2:} \quad I_{c_1} &= k''_1 \frac{1}{\vartheta_1} I_{A_1} e^{j(H,30-180)} \\ I_{d_1} &= k''_1 \frac{1}{\vartheta_1} I_{B_1} e^{j(H,30+180)} \\ I_{f_1} &= k''_1 \frac{1}{\vartheta_1} I_{C_1} e^{j(H,30+180)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

b. Układy kolejności przeciwej —

$$\left. \begin{aligned} \text{tor 1:} \quad I_{a_2} &= k'_2 \frac{1}{\vartheta_1} I_{A_2} e^{-jH,30} \\ I_{b_2} &= k'_2 \frac{1}{\vartheta_1} I_{B_2} e^{-jH,30} \\ I_{e_2} &= k'_2 \frac{1}{\vartheta_1} I_{C_2} e^{-jH,30} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

tor 2:

$$\left. \begin{aligned} I_{c_2} &= k_2'' \frac{1}{\vartheta_1} I_{A_2} e^{-j(H,30+180)} \\ I_{d_2} &= k_2'' \frac{1}{\vartheta_1} I_{B_2} e^{-j(H,30+180)} \\ I_{f_2} &= k_2'' \frac{1}{\vartheta_1} I_{C_2} e^{-j(H,30+180)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Współczynniki  $k'_1$  i  $k''_1$  (liczby zespolone) podają w jaki sposób symetryczny układ prądów  $I_{A_1}$ ,  $I_{B_1}$  i  $I_{C_1}$  rozdzielono na każdy z transformatorów i torów linii CPZ. Oczywiście  $k'_1 + k''_1 = 1$ . Podobnie współczynniki  $k'_2$  i  $k''_2$  (liczby zespolone) podają w jaki sposób symetryczny układ prądów  $I_{A_2}$ ,  $I_{B_2}$  i  $I_{C_2}$  rozdzielono na każdy z transformatorów (i torów linii CPZ); w tym przypadku również  $k'_2 + k''_2 = 1$ .

Składowe prądów fazowych w fazach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  w sieci CPZ, zależne tylko od składowych grupowych kolejności 01 i 11, będą więc odpowiednio wynosiły.

$$\left. \begin{aligned} I_{a_{(01,11)}} &= I_{a_1} + I_{a_2} = \frac{1}{\vartheta_1} \left[ k'_1 I_{A_1} e^{jH,30} + k''_1 I_{A_2} e^{-jH,30} \right] \\ I_{b_{(01,11)}} &= I_{b_1} + I_{b_2} = \frac{1}{\vartheta_1} \left[ k'_1 I_{B_1} e^{jH,30} + k''_1 I_{B_2} e^{-jH,30} \right] \\ I_{c_{(01,11)}} &= I_{c_1} + I_{c_2} = \frac{1}{\vartheta_1} \left[ k''_1 I_{A_1} e^{j(H,30+180)} + k'_1 I_{A_2} e^{-j(H,30+180)} \right] \\ I_{d_{(01,11)}} &= I_{d_1} + I_{d_2} = \frac{1}{\vartheta_1} \left[ k''_1 I_{B_1} e^{j(H,30+180)} + k'_1 I_{B_2} e^{-j(H,30+180)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Z drugiej strony, zgodnie z równaniem (1),

$$\left. \begin{aligned} I_{a_{(01,11)}} &= I_{01} + I_{11} \\ I_{b_{(01,11)}} &= I_{01} - I_{11} \\ I_{c_{(01,11)}} &= -I_{01} - I_{11} = -I_{a_{(01,11)}} \\ I_{d_{(01,11)}} &= -I_{01} + I_{11} = -I_{b_{(01,11)}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Z równań (32), po uwzględnieniu wzorów (33), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} k'_1 e^{jH,30} &= -k''_1 e^{j(H,30+180)} \\ k''_2 e^{-jH,30} &= -k'_2 e^{-j(H,30+180)} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

z których wynika

$$\left. \begin{aligned} k'_1 &= k''_1 \\ k'_2 &= k''_2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

a ponieważ  $k'_1 + k''_1 = 1$  i  $k'_2 + k''_2 = 1$ , więc

$$\left. \begin{array}{l} k'_1 = k''_1 = \frac{1}{2} \\ k'_2 = k''_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (36)$$

Zależności (35) upoważniają do sformułowania następującego ważnego twierdzenia: Niezależnie od stanu sieci CPZ (warunki normalne, zwarcia lub przerwy w fazach), układy składowych symetrycznych trójfazowych prądów kolejności zgodnej i przeciwej są takie same w każdym z dwóch transformatorów sprzągających sieci CPZ i normalną po stronie sieci normalnej, po stronie zaś sieci CPZ układy te są przeciwsobne. Oznacza to m. in., że moduły składowych symetrycznych prądów kolejności zgodnej i przeciwej, wpływających do obu wymienionych transformatorów z sieci normalnej, są równe połowie modułów składowych symetrycznych prądów kolejności zgodnej i przeciwej w fazach sieci normalnej.

Należy w tym miejscu wyjaśnić, że w warunkach normalnej pracy linii CPZ, gdy układy prądów w obu fazach linii CPZ są symetryczne, wtedy nie ma składowych grupowych prądów kolejności 00 i 10 i prądy fazowe w sieci CPZ wynoszą:

$$\left. \begin{array}{l} I_a = I_{a(01,11)} \\ I_b = I_{b(01,11)} \\ I_c = I_{c(01,11)} \\ I_d = I_{d(01,11)} \end{array} \right\} \quad (a)$$

W przypadku stanu zakłóceniowego w sieci CPZ mogą (w zależności od rodzaju błędu) pojawić się składowe grupowe kolejności 00 i 10 i wówczas

$$\left. \begin{array}{l} I_a = I_{a(01,11)} + I_{a(00,10)} \\ I_b = I_{b(01,11)} + I_{b(00,10)} \\ I_c = I_{c(01,11)} + I_{c(00,10)} \\ I_d = I_{d(01,11)} + I_{d(00,10)} \end{array} \right\} \quad (b)$$

przy czym składowe prądów fazowych  $I_{a(00,10)}$ ,  $I_{b(00,10)}$ ,  $I_{c(00,10)}$ ,  $I_{d(00,10)}$  zależą od składowych grupowych kolejności 00 i 10, zgodnie z równaniami podstawowymi (1).

W stanach zakłóceniowych w sieci typu CPZ, do których analizy ma zastosowanie teoria składowych symetrycznych grupowych, w przewodach łączących szyny zbiorniki z zaciskami transformatorów po stronie sieci normalnej płyną prądy tworzące niesymetryczne układy trójfazowe.

Ogólnie biorąc układ prądów fazowych ( $A_I$ ) w przewodach łączących jeden transformator różni się od układu prądów fazowych ( $A_{II}$ ) w przewodach łączących drugi transformator z szynami zbiorniczymi po stronie sieci normalnej, tj.

$$A_I \neq A_{II}. \quad (c)$$

Układy te można rozłożyć na składowe układy symetryczne trójfazowe — kolejności zgodnej ( $A_{I_1}$  i  $A_{II_1}$ ) i przeciwniej ( $A_{II_2}$  i  $A_{I_2}$ ), czyli

$$\left. \begin{array}{l} A_I = A_{I_1} + A_{I_2} \\ A_{II} = A_{II_1} + A_{II_2} \end{array} \right\} \quad (d)$$

Każdy z tych składowych układów symetrycznych ( $A_{I_1}$ ,  $A_{II_1}$ ,  $A_{I_2}$ ,  $A_{II_2}$ ) jest superpozycją układów symetrycznych danej kolejności: prądów zależnych od składowych grupowych przetransformowanych kolejności 01 i 11 i prądów zależnych od składowych grupowych przetransformowanych kolejności 00 i 10, a zatem

$$\left. \begin{array}{l} A_{I_1} = A_{I_1(01,11)} + A_{I_1(00,10)} \\ A_{I_2} = A_{I_2(01,11)} + A_{I_2(00,10)} \end{array} \right\} \quad (e)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{II_1} = A_{II_1(01,11)} + A_{II_1(00,10)} \\ A_{II_2} = A_{II_2(01,11)} + A_{II_2(00,10)} \end{array} \right\} \quad (f)$$

Układy  $A_{I_1(00,10)}$ ,  $A_{I_2(00,10)}$ ,  $A_{II_1(00,10)}$  i  $A_{II_2(00,10)}$  występują w szynach zbiorczych, przewodach łączących transformatory z szynami zbiorczymi po stronie sieci normalnej i w uzwojeniach transformatorów; nie ma ich w przewodach łączących szyny zbiorcze z elementami sieci normalnej (liniami normalnymi, maszynami synchronicznymi, dławikami).

Zgodnie z przeprowadzonym dowodem

$$\left. \begin{array}{l} A_{I_1(01,11)} = A_{II_1(01,11)} = \frac{1}{2} A_{1(01,11)} \\ A_{I_2(01,11)} = A_{II_2(01,11)} = \frac{1}{2} A_{2(01,11)} \end{array} \right\} \quad (g)$$

Przedmiotem naszych rozważań są układy prądów wymienione we wzorach (g), zależne od składowych grupowych przetransformowanych prądów kolejności 01 i 11.

Jeżeli pominąć prądy magnesujące transformatorów, to oczywiście

$$\left. \begin{array}{l} I_{a_1} = I'_{A_1} \\ I_{b_1} = I'_{B_1} \\ I_{a_2} = I'_{A_2} \\ I_{b_2} = I'_{B_2} \end{array} \right\} \quad (37)$$

gdzie  $I'_{A_1}$ ,  $I'_{B_1}$ ,  $I'_{A_2}$ ,  $I'_{B_2}$  — są to składowe symetryczne prądów w sieci normalnej sprowadzone na poziom sieci typu CPZ, tor pierwszy (fazy a i b).

Indeksem „prim“ oznaczać będziemy wszystkie wielkości sprowadzone na poziom sieci typu CPZ.

Mając to na uwadze, równania (32) [po uwzględnieniu (36)] przybiorą postać:

$$\left. \begin{aligned}
 I'_{a(01,11)} &= (I'_{A_1} + I'_{A_2}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\vartheta_1} (I_1 e^{jH,30} + I_2 e^{-jH,30}) \\
 I'_{b(01,11)} &= (I'_{B_1} + I'_{B_2}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\vartheta_1} (a^2 I_1 e^{jH,30} + a I_2 e^{-jH,30}) \\
 I'_{c(01,11)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\vartheta_1} (I_1 e^{j(H,30+180)} + I_2 e^{-j(H,30+180)}) = -I'_{a(01,11)} \\
 I'_{d(01,11)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\vartheta_1} (a^2 I_1 e^{j(H,30+180)} + a I_2 e^{-j(H,30+180)}) = -I'_{b(01,11)}
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$H_1$  we wzorach (38) oznacza grupę połączeń transformatora, do którego przyłączone są fazy  $a$  i  $b$  sieci CPZ, np.  $H_1=5$ , grupa zaś połączeń transformatora, do którego przyłączone są fazy  $c$  i  $d$  jest równa w tym przypadku  $5 \pm 6 = 11$  lub  $-1$ , przy czym obie liczby wynikowe (11 i  $-1$ ) są równoważne.

Rozkładając układ prądów ( $I'_{a(01,11)}$ ,  $I'_{b(01,11)}$ ,  $I'_{c(01,11)}$  i  $I'_{d(01,11)}$ ) podanych we wzorach (38) na składowe grupowe według równania (1) otrzymamy ogólnie

$$\left. \begin{aligned}
 I'_{01} &= \frac{1}{2} (I'_{a(01,11)} + I'_{b(01,11)}) \\
 I'_{11} &= \frac{1}{2} (I'_{a(01,11)} - I'_{b(01,11)}) \\
 I'_{00} &= 0 \\
 I'_{10} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Składowe  $I'_{01}$ ,  $I'_{11}$ ,  $I'_{00}$  i  $I'_{10}$  nazwiemy składowymi grupowymi prądów w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci CPZ. Po uwzględnieniu zależności (38)

$$\left. \begin{aligned}
 I'_{01} &= \frac{1}{8} \left[ (1 - j\sqrt{3}) I_1 e^{jH,30} + (1 + j\sqrt{3}) I_2 e^{-jH,30} \right] \vartheta_1^{-1} \\
 I'_{11} &= \frac{3}{8} \left[ \left( 1 + j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) I_1 e^{jH,30} + \left( 1 - j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) I_2 e^{-jH,30} \right] \vartheta_1^{-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

a z równań (40):

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \left[ \left( 1 + j \sqrt{3} \right) I'_{01} + \left( 1 - j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) I'_{11} \right] \vartheta_1 e^{-jH,30} \\
 I_2 &= \left[ \left( 1 - j \sqrt{3} \right) I'_{01} + \left( 1 + j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) I'_{11} \right] \vartheta_1 e^{jH,30}
 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Równania (40) i (41) podają wzajemne związki między składowymi symetrycznymi grupowymi prądów w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci CPZ i składowymi symetrycznymi trójfazowymi prądów w sieci normalnej.

Po pominięciu prądów magnesujących transformatorów zachodzą oczywiście równości

$$\left. \begin{aligned} I'_{01} &= I_{01_{cpz}} \\ I'_{11} &= I_{11_{cpz}} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

gdzie  $I_{01_{cpz}}$  i  $I_{11_{cpz}}$  są to składowe grupowe prądów fazowych ( $I_a, I_b, I_c$  i  $I_d$ ) w sieci CPZ kolejności odpowiednio 01 i 11.

Z kolei podobne związki znajdziemy dla składowych grupowych napięć w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci CPZ i składowych symetrycznych trójfazowych napięć w sieci normalnej.

Napięcia międzyprzewodowe  $U_{AC}$  i  $U_{BC}$ , w zależności od napięć fazowych na zaciskach rozważanego generatora, są

$$\left. \begin{aligned} U_{AC} &= U_A - U_C \\ U_{BC} &= U_B - U_C \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Zakładamy, że zaciski rozważanego generatora są połączone poprzez oporności fazowe równe zeru z zaciskami na szynach zbiorecznych w rozważanej stacji.

Oczywiście napięcia międzyprzewodowe wymienione we wzorach (43) nie zawierają składowych symetrycznych zerowych napięć fazowych, bo- wiem różnica składowych zerowych napięć w fazach A i C, a także w fazach B i C jest równa zeru.

Napięcia na zaciskach transformatorów po stronie sieci normalnej różnią się ogólnie od napięć na zaciskach znajdujących się na szynach zbiorecznych, do których przyłączony jest rozważany generator, o straty napięcia w przewodach i szynach, łączących zaciski transformatorów z zaciskami na szynach zbiorecznych. Straty te, zależne od składowych przekształcanych prądów kolejności 01, 00, 11 i 10, można pominąć, gdyż stanowią one zwykle ułamek procenta napięć międzyprzewodowych w praktycznych układach przesyłowych.

W zależności od składowych symetrycznych trójfazowych napięć otrzymamy dwa układy napięć międzyprzewodowych po stronie sieci normalnej

$$\left. \begin{aligned} U_{AC_1} &= U_{A_1} - U_{C_1} = (1-a)U_1 \\ U_{BC_1} &= U_{B_1} - U_{C_1} = (a^2 - a)U_1 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

i

$$\left. \begin{aligned} U_{AC_2} &= U_{A_2} - U_{C_2} = (1-a^2)U_2 \\ U_{BC_2} &= U_{B_2} - U_{C_2} = (a - a^2)U_2 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Składowe napięć — zgodna ( $U_1$ ) i przeciwna ( $U_2$ ) — sprowadzone na stronę pierwotną transformatora  $I$ , połączonego z fazami  $a$  i  $b$  sieci CPZ, są

$$\left. \begin{aligned} U'_1 &= \vartheta_1 U_1 e^{jH,30} \\ U'_2 &= \vartheta_1 U_2 e^{-jH,30} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Składowe napięć  $U_1$  i  $U_2$ , sprowadzone na stronę pierwotną transformatora  $II$ , połączonego z fazami  $c$  i  $d$  sieci CPZ, spełniają zależności

$$\left. \begin{aligned} U'_1 &= \vartheta_1 U_1 e^{j(H,30+180)} \\ U'_2 &= \vartheta_1 U_2 e^{-j(H,30+180)} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Składowe symetryczne trójfazowe  $U_{AC_1}$  i  $U_{BC_1}$  oraz  $U_{AC_2}$  i  $U_{BC_2}$  napięć międzyprzewodowych, po sprowadzeniu na stronę sieci CPZ, przekształcają się w takie same składowe, lecz napięć faz  $a$  i  $b$  oraz  $c$  i  $d$  w stosunku do ziemi, czyli napięć fazowych w sieci CPZ wobec uziemienia faz  $e$  i  $f$ , których odpowiednikiem po stronie sieci normalnej jest faza  $C$ .

Otrzymamy zatem następujące zależności między składowymi symetrycznymi napięć fazowych w sieci normalnej i napięciami międzyprzewodowymi w tej sieci, sprowadzonymi na stronę sieci CPZ i wyrażonymi w czterofazowym układzie, jaki został przyjęty dla sieci CPZ:

$$\left. \begin{aligned} U'_a &= U'_{AC_1} + U'_{AC_2} = \vartheta_1 [(1-a)U_1 e^{jH,30} + (1-a^2)U_2 e^{-jH,30}] \\ U'_b &= U'_{BC_1} + U'_{BC_2} = \vartheta_1 [(a^2-a)U_1 e^{jH,30} + (a-a^2)U_2 e^{-jH,30}] \\ U'_c &= (U'_{AC_1} + U'_{AC_2}) e^{j180} = \vartheta_1 [(1-a)U_1 e^{j(H,30+180)} + (1-a^2)U_2 e^{-j(H,30+180)}] = -U'_a \\ U'_d &= (U'_{BC_1} + U'_{BC_2}) e^{j180} = \vartheta_1 [(a^2-a)U_1 e^{j(H,30+180)} + (a-a^2)U_2 e^{-j(H,30+180)}] = -U'_b \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Rozkładając napięcia  $U'_a$ ,  $U'_b$ ,  $U'_c$  i  $U'_d$  na składowe symetryczne grupowe otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} U'_{01} &= \frac{1}{2} (U'_a + U'_b) \\ U'_{11} &= \frac{1}{2} (U'_a - U'_b) \\ U'_{00} &= 0 \\ U'_{10} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Składowe  $U'_{01}$  i  $U'_{11}$  nazwiemy składowymi grupowymi napięć w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci typu CPZ kolejności 01 i 11.

Jeżeli założymy nawet, że straty napięcia w transformatorach sprzągających sieci typu CPZ i normalną są równe zeru, to jednak napięcia  $U'_a$ ,  $U'_b$ ,  $U'_c$ ,  $U'_d$  nie są ogólnie równe napięciom fazowym na zaciskach transformatorów po stronie sieci CPZ —  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_c$ ,  $U_d$ .

Równości

$$\left. \begin{array}{l} U'_a = U_a \\ U'_b = U_b \\ U'_c = U_c \\ U'_d = U_d \end{array} \right\} \quad (a)$$

przy poczynionym założeniu są spełnione wówczas, gdy nie ma w sieci CPZ składowych grupowych napięć kolejności 00 i 10, czyli w warunkach pracy normalnej, gdy układy napięć na zaciskach transformatorów po stronie CPZ mogą być przyjęte jako układy symetryczne.

W stanach zakłóceniowych w sieci CPZ mogą pojawić się na zaciskach transformatora po stronie sieci CPZ składowe grupowe napięć kolejności 00 i 10. Wtedy

$$\left. \begin{array}{l} U_a = U_{a(01,11)} + U_{a(00,10)} \\ U_b = U_{b(01,11)} + U_{b(00,10)} \\ U_c = U_{c(01,11)} + U_{c(00,10)} \\ U_d = U_{d(01,11)} + U_{d(00,10)} \end{array} \right\} \quad (b)$$

przy czym, oczywiście (przy poczynionych założeniach),

$$\left. \begin{array}{l} U_{a(01,11)} = U'_a \\ U_{b(01,11)} = U'_b \\ U_{c(01,11)} = U'_c \\ U_{d(01,11)} = U'_d \end{array} \right\} \quad (c)$$

Przedmiotem naszych rozważań są napięcia wymienione w równaniach (c), zależne tylko od składowych grupowych napięć kolejności 01 i 11.

Składowe grupowe napięć kolejności 00 i 10 mogą istnieć w użwojeniach transformatorów po obu stronach, lecz nie ma ich na zaciskach transformatorów po stronie sieci normalnej. Składowe grupowe napięć kolejności 00 są w fazie po stronie sieci CPZ ( $U_{a_{00}} = U_{b_{00}} = U_{c_{00}} = U_{d_{00}}$ ), a wskazy składowych grupowych kolejności 10 w sieci CPZ tworzą dwie przeciwsobne pary, przy czym składowe faz a i c są w fazie oraz faz b i d są w fazie ( $U_{a_{10}} = U_{c_{10}} = -U_{b_{10}} = -U_{d_{10}}$ ).

Ze względu na różnicę grup połączeń transformatorów wynoszącą  $180^\circ$  składowe grupowe napięć kolejności 00 i 10 sprowadzone na poziom sieci CPZ znoszą się na zaciskach transformatorów po stronie sieci normalnej.

Podstawiając zależności (48) do równań (49) otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} U'_{01} = \frac{3}{4} \left[ \left( 1 - j\sqrt{3} \right) U_1 e^{jH,30} + \left( 1 + j\sqrt{3} \right) U_2 e^{-jH,30} \right] \vartheta_1 \\ U'_{11} = \frac{3}{4} \left[ \left( 1 + j\frac{1}{\sqrt{3}} \right) U_1 e^{jH,30} + \left( 1 - j\frac{1}{\sqrt{3}} \right) U_2 e^{-jH,30} \right] \vartheta_1 \end{array} \right\} \quad (50)$$

Odwrotnie

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{6} \left[ \left( 1 + j\sqrt{3} \right) U'_{01} + 3 \left( 1 - j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) U'_{11} \right] \vartheta_1^{-1} e^{-jH,30} \\ U_2 &= \frac{1}{6} \left[ \left( 1 - j\sqrt{3} \right) U'_{01} + 3 \left( 1 + j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) U'_{11} \right] \vartheta_1^{-1} e^{jH,30} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Równania (50) i (51) podają związki między składowymi symetrycznymi trójfazowymi napięć w sieci normalnej kolejności zgodnej i przeciwej  $U_1$  i  $U_2$  i składowymi grupowymi napięć w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci CPZ kolejności 01 i 11 ( $U'_{01}$  i  $U'_{11}$ ).

### 3.2. Siły elektromotoryczne i oporności maszyny synchronicznej w układzie składowych symetrycznych grupowych

Podstawiając do równań (50) zależności (24) przy uwzględnieniu związków (41) otrzymuje się następujące wzory:

$$\left. \begin{aligned} U'_{01} &= E'_{01} - (Z'_{0101} I'_{01} + Z'_{0111} I'_{11}) = E'_{01} - \Delta U'_{01} \\ U'_{11} &= E'_{11} - (Z'_{1101} I'_{01} + Z'_{1111} I'_{11}) = E_{11} - \Delta U'_{11} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Równania (52) są podstawowymi równaniami wiążącymi składowe grupowe napięć, SEM-nych, prądów i oporności, sprowadzonych na poziom sieci typu CPZ, maszyny synchronicznej.

Podane nowe symbole we wzorach (52) nazwiemy:

$E'_{01}$  — składowa grupowa kolejności 01 SEM-nych maszyny synchronicznej sprowadzonych na poziom sieci CPZ,

$E'_{11}$  — składowa grupowa kolejności 11 SEM-nych maszyny synchronicznej sprowadzonych na poziom sieci CPZ,

$\Delta U'_{01}$  — składowa grupowa kolejności 01 strat napięcia w uzwojeniach twornika maszyny synchronicznej<sup>2</sup>, sprowadzonych na poziom sieci CPZ,

$\Delta U'_{11}$  — składowa grupowa kolejności 11 strat napięcia w uzwojeniach twornika maszyny synchronicznej<sup>2</sup>, sprowadzonych na poziom sieci CPZ,

$Z'_{0101} = Z'_{01}$  — oporność zastępcza maszyny synchronicznej dla składowych grupowych kolejności 01 napięć i prądów sprowadzonych na poziom sieci CPZ,

$Z'_{1111} = Z'_{11}$  — oporność zastępcza maszyny synchronicznej dla składowych grupowych kolejności 11 napięć i prądów sprowadzonych na poziom sieci CPZ,

<sup>2</sup> Ogólnie: ... strat napięcia na zastępczych opornościach maszyny synchronicznej.

$Z'_{01_{11}}$  — oporność zastępcza maszyny synchronicznej dla składowych grupowych kolejności 01 napięć i kolejności 11 prądów spradowanych na poziom sieci CPZ,

$Z'_{11_{01}}$  — oporność zastępcza maszyny synchronicznej dla składowych grupowych kolejności 11 napięć i kolejności 01 prądów spradowanych na poziom sieci CPZ.

Wyżej wymienione składowe grupowe wielkości w sieci normalnej spradowanych na poziom sieci CPZ wynoszą:

$$\left. \begin{array}{l} E'_01 = \vartheta_1 e^{jH_030} E_{01} \\ E'_{11} = \vartheta_1 e^{jH_030} E_{11} \\ Z'_{01} = \vartheta_1^2 Z_{01} \\ Z'_{11} = \vartheta_1^2 Z_{11} \\ Z'_{01_{11}} = \vartheta_1^2 Z_{01_{11}} \\ Z'_{11_{01}} = \vartheta_1^2 Z_{11_{01}} \end{array} \right\} \quad (53)$$

przy czym:

$$\left. \begin{array}{l} E_{01} = \frac{3}{4} \left( 1 - j\sqrt{3} \right) E_1 = \frac{3}{2} E_1 e^{-j60} \\ E_{11} = \frac{3}{4} \left( 1 + j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) E_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} E_1 e^{j30} \end{array} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{01_{01}} = Z_{01} = 3(Z_1 + Z_2) \\ Z_{11_{11}} = Z_{11} = Z_1 + Z_2 \\ Z_{01_{11}} = -Z_{11_{01}} = j\sqrt{3} (Z_2 - Z_1) \end{array} \right\} \quad (55)$$

Jeżeli przyjąć wskaz  $E_{01}$  na osi liczb rzeczywistych, jako na osi odniesienia, to

$$\left. \begin{array}{l} E_{01} = |E_{01}| = \frac{3}{2} |E_1| \\ E_{11} = j \frac{\sqrt{3}}{2} |E_1| = j \frac{1}{\sqrt{3}} E_{01} \end{array} \right\} \quad (54a)$$

Dla maszyn synchronicznych można założyć z dostateczną w praktyce dokładnością

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \approx jX_1, \\ Z_2 \approx jX_2. \end{array} \right\} \quad (56)$$

Wówczas

$$\left. \begin{array}{l} Z_{01} \approx j3(X_1 + X_2) \\ Z_{11} \approx j(X_1 + X_2) \\ Z_{11_{01}} = -Z_{01_{11}} \approx \sqrt{3} (X_2 - X_1) \end{array} \right\} \quad (55a)$$

Równania (52) do (55) oraz zaproponowane określenia dla nowych wielkości wymagają wyjaśnień.

Przede wszystkim należy zaznaczyć, że równania (52) mają postać równań składowych grupowych i że oporności  $Z'_{01_{01}}$ ,  $Z'_{11_{11}}$ ,  $Z'_{01_{11}}$  i  $Z'_{11_{01}}$  muszą się nazywać opornościami dla składowych grupowych, wiążą bowiem składowe grupowe napięć ze składowymi grupowymi prądów. Wielkości  $E'_{01}$  i  $E'_{11}$  są składowymi grupowymi sił elektromotorycznych maszyny synchronicznej sprowadzonych na poziom sieci CPZ — analogicznie jak  $U'_{01}$  i  $U'_{11}$  są składowymi grupowymi napięć na zaciskach tej maszyny sprowadzonych na poziom sieci CPZ.

Stwierdzamy przy tym, że prądy w sieci normalnej, zależne od składowych grupowych przetransformowanych prądów kolejności 01 i 11, sprowadzone na poziom sieci CPZ, mogą być rozłożone na składowe układy symetryczne grupowe kolejności 01 i 11. Podobnie mogą być rozłożone na składowe układy symetryczne grupowe kolejności 01 i 11 napięcia przewodowe w sieci normalnej sprowadzone na poziom sieci CPZ.

Nietrudno uzasadnić, że jeżeli rozważany generator synchroniczny nie jest bezpośrednio przyłączony do rozpatrywanych szyn zbiorecznych, lecz poprzez transformatory trójfazowe w sieciach normalnych o przekładniach  $\vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_n$  i grupach połączeń  $H_2, H_3, \dots, H_n$ , przy czym stroną pierwotną tych transformatorów są uzwojenia od strony sieci CPZ, to składowe grupowe SEM-nych sprowadzonych na poziom sieci CPZ i oporności zastępcze generatora dla składowych grupowych, sprowadzone na stronę sieci CPZ, wyrażą się następującymi wzorami ogólnymi:

$$\left. \begin{array}{l} E'_{01} = \vartheta e^{jH30} E_{01} \\ E'_{11} = \vartheta e^{jH30} E_{11} \\ Z'_{01} = \vartheta^2 Z_{01} \\ Z'_{11} = \vartheta^2 Z_{11} \\ Z'_{01_{11}} = \vartheta^2 Z_{01_{11}} \end{array} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{przy czym } \vartheta = \vartheta_1 \cdot \vartheta_2 \dots \vartheta_\alpha \dots \vartheta_n \\ H = H_1 + H_2 + \dots + H_\alpha + \dots + H_n \end{array} \right\} \quad (58)$$

Równania (52) możemy napisać w następującej postaci:

$$\left. \begin{array}{l} U_{01} = E_{01} - (Z_{01_{01}} I_{01} + Z_{01_{11}} I_{11}) = E_{01} - \Delta U_{01} \\ U_{11} = E_{11} - (Z_{11_{01}} I_{01} + Z_{11_{11}} I_{11}) = E_{11} - \Delta U_{11} \end{array} \right\} \quad (59)$$

gdzie:  $E_{01}$ ,  $E_{11}$ ,  $Z_{01_{01}}$ ,  $Z_{11_{11}}$ ,  $Z_{01_{11}}$  — jak we wzorach (54) i (55), podczas gdy

$$\left. \begin{array}{l} I_{01} = \vartheta e^{-jH30} I'_{01} \\ I_{11} = \vartheta e^{-jH30} I'_{11} \end{array} \right\} \quad (60)$$

$$\left. \begin{array}{l} U_{01} = \frac{1}{\vartheta} e^{-jH30} U'_{01} \\ U_{11} = \frac{1}{\vartheta} e^{-jH30} U'_{11} \end{array} \right\} \quad (61)$$

Równania (53), (60) i (61) są podobne do równań wiążących składowe symetryczne trójfazowe w sieci normalnej  $A$ , sprowadzone na poziom sieci normalnej  $B$ , ze składowymi symetrycznymi w sieci normalnej  $A$ .

Wydawałoby się więc pozornie, że wielkości  $E_{01}(U_{01})$ ,  $E_{11}(U_{11})$ ,  $I_{01}$ ,  $I_{11}$ , zawarte we wzorach (53) — (61), są w rozważanym przypadku składowymi grupowymi SEM-nych (napięć) i prądów maszyny synchronicznej w sieci normalnej, a oporności  $Z_{01_{01}}$ ,  $Z_{11_{11}}$ ,  $Z_{01_{11}}$  i  $Z_{11_{01}}$ , tkwiące w tych wzorach, są opornościami dla składowych grupowych napięć i prądów tej maszyny.

Jak to było już podkreślone, układy SEM-nych (napięć) i prądów w sieci normalnej nie mogą być rozłożone na składowe układy symetryczne grupowe czterofazowe.

Nie można więc mówić, że wielkości wymienione we wzorach (53) — (61) bez indeksu „prim“ — są składowymi grupowymi wielkości rzeczywistych rozważanego generatora w sieci normalnej.

Wielkości  $E_{01}(U_{01})$ ,  $E_{11}(U_{11})$ ,  $I_{01}$  i  $I_{11}$  są składowymi grupowymi odpowiednio SEM-nych (napięć) i prądów kolejności 01 i 11 pewnego fikcyjnego generatora, który tu nazwiemy generatorem przekształconym, a sieć normalną, w której pracuje — siecią normalną przekształconą.

Oporności  $Z_{01_{01}}$ , ...  $Z_{11_{01}}$  są opornościami generatora przekształconego dla składowych grupowych odpowiednich kolejności napięcia i prądu.

Przekształcona sieć normalna (przekształcony generator) jest siecią czterofazową (generatorem czterofazowym). Elementem przekształcającym sieć normalną (generator) są transformatory sprzągające sieci CPZ i normalną, których grupy różnią się o 6 godzin normalnych (6h).

Można znaleźć związki między np. napięciami i prądami w sieci normalnej i w sieci normalnej przekształconej, mianowicie

$$\left. \begin{array}{l} I_a = -I_c = \frac{1}{2} I_A \\ I_b = -I_d = \frac{1}{2} I_B \\ U_a = -U_c = U_{AC} \\ U_b = -U_d = U_{BC} \end{array} \right\} \quad (a)$$

Wielkości z małymi literami w indeksie są wielkościami w sieci przekształconej, z dużymi literami zaś — w sieci normalnej.

Załóżmy że w sieci normalnej dany jest symetryczny układ sił elektromotorycznych maszyny synchronicznej:

$$E_1, a^2 E_1 \text{ i } a E_1. \quad (b)$$

Wtedy

$$\left. \begin{aligned} E_a &= -E_c = E_{AC} = E_1 - aE_1 \\ i \quad E_b &= -E_d = E_{BC} = a^2 E_1 - aE_1 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Rozkładając układ sił elektromotorycznych  $E_a, E_b, E_c$  i  $E_d$  na składowe symetryczne grupowe wg równań podstawowych (3) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} E_{01} &= \frac{1}{4} (E_a + E_b - E_c - E_d) = \frac{1}{2} (E_a + E_b) = \frac{3}{4} (1 - j\sqrt{3}) E_1 \\ E_{11} &= \frac{1}{4} (E_a - E_b - E_c + E_d) = \frac{1}{2} (E_a - E_b) = \frac{3}{4} \left(1 + j \frac{1}{\sqrt{3}}\right) E_1 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Równania (d) są zgodne z równaniami (54).

Załóżmy, że sieci normalne i typu CPZ są sprzęgnięte ze sobą transformatorami bez strat o przekładni  $\vartheta_1 = 1$  i grupach połączeń  $H_{1I} = 0$  i  $H_{1II} = 6$  h.

Wtedy

$$\left. \begin{aligned} E'_{01} &= E_{01} \\ (U'_{01}) &= (U_{01}) \\ E'_{11} &= E_{11} \\ (U'_{11}) &= (U_{11}) \\ I'_{01} &= I_{01} \\ I'_{11} &= I_{11} \\ Z'_{01} &= Z_{01} \\ Z'_{11} &= Z_{11} \\ Z'_{0111} &= Z_{0101} \\ Z'_{1101} &= Z_{1101} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Innymi słowy, składowe grupowe wielkości w sieci normalnej sprowadzonych na poziom sieci CPZ są równe w tym przypadku składowym grupowym wielkości w sieci normalnej przekształconej.

Na podstawie powyższego można zdefiniować sieć normalną przekształconą.

Sieć normalna przekształcona jest to sieć normalna sprzęgnięta z siecią typu CPZ poprzez dwa idealne (bez strat) transformatory o przekładni równej jedności o grupach połączeń jednego z nich 0 h i drugiego 6 h. Analogicznie można zdefiniować maszynę synchroniczną przekształconą i elementy sieci normalnej przekształconej.

Wprowadzenie terminu sieci normalnej przekształconej i maszyny synchronicznej przekształconej może być przyczyną nieporozumień w praktyce obliczenia sieci typu CPZ.

Z praktycznego punktu widzenia wystarczy operować i znać składowe grupowe wielkości elementów sieci normalnej sprowadzonych (wielkości)

na poziom sieci CPZ, co przede wszystkim dotyczy oporności dla składowych grupowych tych elementów. Wielkości  $E_{01}(U_{01})$ ,  $E_{11}(U_{11})$ ,  $I_{01}$ ,  $I_{11}$   $Z_{01_{01}} \dots Z_{01_{11}}$  nie odgrywają więc istotnej roli w obliczeniach praktycznych.

Dlatego autor proponuje zamiast określeń dla tych wielkości: „składowe grupowe (SEM-nych, napięć, prądów) w sieci normalnej przekształconej“ przyjąć nażwę (z braku innej): „wielkości (SEM-nych, napięć, prądów) w sieci normalnej w układzie składowych grupowych“. Podobnie zamiast „oporności elementów w sieci normalnej przekształconej dla składowych grupowych“ — „oporności elementów sieci normalnej w układzie składowych grupowych“.

Wobec tego składowe grupowe wielkości sprowadzonych na poziom sieci CPZ (z indeksami „prim“) nazwiemy wielkościami w układzie składowych grupowych sprowadzonymi na poziom sieci CPZ. Tak np.  $Z_{01_{01}} = Z'_{01}$  — jest to oporność zastępcza maszyny synchronicznej w układzie składowych grupowych kolejności 01 sprowadzona na poziom sieci CPZ.

W takim razie:

1. wzory (57), (60) i (61) przedstawiają prawo transformacji składowych symetrycznych grupowych z sieci normalnej (ściśle: normalnej przekształconej) do sieci CPZ i odwrotnie;
2. równania (59) podają związki między siłami elektromotorycznymi, napięciami, prądami i opornościami maszyny synchronicznej w układzie składowych grupowych.

Składowe strat napięcia w generatorze wymienione we wzorach (59) są:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{01} &= Z_{01_{01}} I_{01} + Z_{01_{11}} I_{11} \\ \Delta U_{11} &= Z_{11_{01}} I_{01} + Z_{11_{11}} I_{11} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Za wzorów (62) wynika, że maszyna synchroniczna (ściśle: maszyna synchroniczna przekształcona) jest ogólnie niesymetrycznym elementem dla składowych symetrycznych grupowych.

Jeżeli jednak założymy, że oporności maszyny synchronicznej dla składowej zgodnej i przeciwej są sobie równe, tj.

$$\text{to} \quad Z_1 = Z_2, \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{01_{11}} &= 0 \\ Z_{11_{01}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Zatem

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{01} &= Z_{01_{01}} I_{01} = Z_{01} I_{01} \\ \Delta U_{11} &= Z_{11_{11}} I_{11} = Z_{11} I_{11}, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} Z_{01_{01}} &= Z_{01} = 6Z_1 \\ Z_{11_{11}} &= Z_{11} = 2Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Taka maszyna, dla której  $Z_1 = Z_2$ , jest maszyną symetryczną w układzie składowych grupowych.

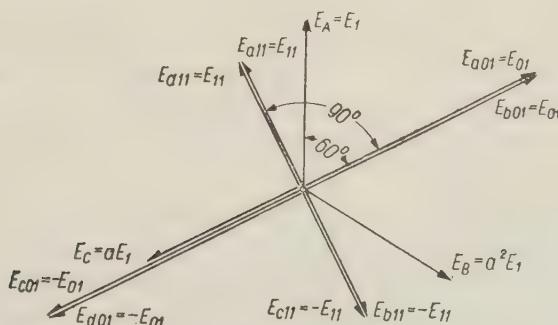
Założenie  $Z_1 = Z_2$  można przyjąć dla turbogeneratorów z dostateczną dla praktyki dokładnością dla wszystkich stanów ich pracy.

Równania (59) lub (52) dotyczą zależności między SEM-nymi, napięciami, prądami i opornościami w układzie składowych grupowych w fazie podstawowej, w fazie  $a$ . Podobne równania są słuszne w fazach  $b, c$  i  $d$ , przy czym zachodzą związki wynikające z równań podstawowych dla składowych grupowych a mianowicie na przykład (4):

$$\left. \begin{array}{l} E_{b_{01}} = E_{01} = E_{a_{01}} \\ E_{c_{01}} = -E_{01} \\ E_{d_{01}} = -E_{01} \end{array} \right\} \quad (67)$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{b_{11}} = -E_{11} = -E_{a_{11}} \\ E_{c_{11}} = -E_{11} \\ E_{d_{11}} = E_{11} \end{array} \right\} \quad (68)$$

Na rys. 2 podano wykresy wskazowe sił elektromotorycznych fazowych i w układzie składowych grupowych maszyny synchronicznej. Takie



Rys. 2. Wykresy wskazowe sił elektromotorycznych fazowych i w układzie składowych grupowych maszyny synchronicznej.

same zależności, jak podane we wzorach (67) i (68) dla SEM-nych w układzie składowych grupowych, są oczywiście spełnione dla napięć i prądów w układzie składowych grupowych w fazach  $b, c$  i  $d$ . Oporności  $Z_{01_{01}}, Z_{11_{11}}, Z_{01_{11}}, Z_{11_{01}}$  są takie same w każdej z faz sieci składowych grupowych.

Stan pracy sieci typu CPZ odtwarzają ogólnie cztery sieci składowych grupowych, a więc sieci kolejności: 01, 00, 11 i 10. Każda z tych sieci jest siecią czterofazową, przy czym fazy tych sieci są tworami samoistnymi, niepołączonymi nawzajem ani galwanicznie, ani magnetyczne. Każda z sieci jest również samoistna, o ile elementy sieci są symetryczne w układzie składowych grupowych. Jeśli ta symetria nie jest spełniona, sieci składowych grupowych poszczególnych kolejności są połączone między sobą w tych miejscach, gdzie zachodzi niesymetria.

Jak już wspomniano, źródłami składowych prądów kolejności 01 i 11 są rzeczywiste źródła prądu, a więc głównie maszyny synchroniczne.

Z podanych wyżej zależności wynika, że trójfazową maszyną synchroniczną o symetrycznym układzie SEM-nych można zastąpić dwiema sztucznymi maszynami synchronicznymi czterofazowymi: jedną w układzie składowych grupowych kolejności 01, drugą w układzie składowych grupowych kolejności 11. Maszyna w układzie składowych grupowych kolejności 01 jest źródłem prądów w sieci kolejności 01, maszyna dla kolejności 11 jest źródłem prądów w sieci kolejności 11.

Przez czterofazową maszynę w układzie składowych grupowych, np. kolejności 01, należy rozumieć zespół czterech maszyn niezależnych danej kolejności, czyli tu kolejności 01. Jedna z nich działa w fazie *a* (podstawowej) sieci danej kolejności, druga — w fazie *b*, trzecia — w fazie *c*, czwarta — w fazie *d* sieci tej kolejności. Wystarczy oczywiście znać maszynę dla danej składowej grupowej w układzie składowych grupowych w fazie podstawowej; zjawiska zachodzące w maszynach pozostałych faz będą takie same z tym jednak, że wielkości SEM-nych, napięć i prądów będą równe tym wielkościom w maszynie w fazie *a* lub będą w przeciww fazie z nimi — zgodnie z podstawowymi równaniami dla składowych grupowych, np. (67) i (68).

Maszyny w układzie składowych grupowych są tworami sztucznymi. Właściwości tych maszyn (poza wymienionymi) wynikają z właściwości maszyn rzeczywistych dla składowych symetrycznych trójfazowych zgodnej i przeciwej, które są powszechnie znane, bowiem SEM-ne maszyn zastępczych w układzie składowych grupowych są proporcjonalne do SEM-nej, równej składowej zgodnej SEM-nych maszyny rzeczywistej ( $E_1$ ), zastępcze zaś oporności maszyn w układzie składowych grupowych są proporcjonalne do oporności dla składowych zgodnej i przeciwej maszyny rzeczywistej. Tak na przykład charakter przebiegu w czasie SEM-nych w układzie składowych grupowych kolejności  $E_{01}$  i  $E_{11}$  będzie taki sam jak składowej SEM-nych kolejności zgodnej  $E_1$ , zmiana zaś w czasie w stanie nieustalonym oporności w układzie składowych grupowych bę-

dzie odpowiadać jednocośnej zmianie oporności dla składowych symetrycznych zgodnej ( $Z_1$ ) i przeciwniej ( $Z_2$ ).

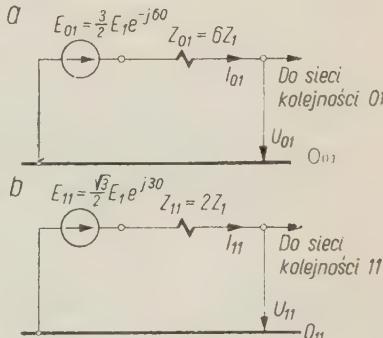
Na podstawie równań (59) lub (52) można by podać schematy zastępcze maszyny synchronicznej w układzie składowych grupowych w przypadku ogólnym, gdy  $Z_1 \neq Z_2$ . Schemat zastępczy maszyny w układzie składowych grupowych kolejności 01 w tym przypadku musi być powiązany (poprzez np. idealne przekładniki prądowe o przekładni 1 : 1) ze schematem zastępczym maszyny kolejności 11.

Schematy te, ze względu na ich złożoność i ograniczoną przydatność w praktyce, nie zostaną tu podane.

Jeżeli oporności maszyny dla składowej zgodnej i przeciwniej są sobie równe, tj. jeżeli  $Z_1 = Z_2$ , to znika połączenie między schematami zastępczymi maszyn w układzie składowych grupowych kolejności 01 i 11 i maszyny w układzie składowych grupowych tych kolejności pracują niezależnie jedna od drugiej.

Na rys. 3a podano schemat zastępczy maszyny synchronicznej w układzie składowych grupowych kolejności 01, a na rys. 3b schemat zastępczy w układzie składowych grupowych kolejności 11 w przypadku gdy  $Z_1 = Z_2$ . Pełne schematy zastępcze maszyn synchronicznych w układzie składowych grupowych stwarzają pewne trudności przy obliczaniu błędów w sieciach A typu CPZ metodą składowych grupowych. W praktycznych obliczeniach, zwłaszcza gdy w układzie elektromagnetycznym przeważają turbogeneratory nad hydrogeneratorami, można założyć  $Z_1 = Z_2$  i posługiwać się prostymi schematami zastępczymi maszyn synchronicznych w układzie składowych grupowych, podanymi na rys. 3.

W tych bardzo rzadkich w praktyce przypadkach, gdy  $Z_1$  i  $Z_2$  znacznie się różnią, a oporności  $Z_{01_{11}}$  i  $Z_{11_{01}}$  mają nie do pominięcia wpływ na wyniki obliczeń, można również korzystać ze schematów na rys. 2, jednak w odniesieniu do schematu kolejności 01 zamiast SEM-ną  $E_{01}$  należy przyjąć SEM-ną:  $E_{01} - Z_{01_{11}} I_{11}$ , zamiast  $E_{11}$  w schemacie kolejności 11:  $E_{11} - Z_{11_{01}} I_{01}$ . Jednak w tym przypadku należy znać z góry określone szukane wartości  $I_{01}$  i  $I_{11}$ . Dlatego metoda taka wymaga przeprowadzenia cyklicznych obliczeń (pomiarów w analizatorze sieciowym) i ma ograniczoną dokładność.



Rys. 3. Schematy zastępcze maszyny synchronicznej w układzie składowych symetrycznych grupowych dla której  $Z_1 = Z_2$  — a. kolejności 01, b. kolejności 11.

4. OPORNOŚCI ZASTĘPCZE ELEMENTÓW SIECI TRÓJFAZOWYCH  
TRÓJPRZEWODOWYCH W UKŁADZIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH  
GRUPOWYCH

Założymy, że wszystkie elementy sieci trójfazowej trójprzewodowej są elementami symetrycznymi dla składowych symetrycznych trójfazowych, tzn., że składowe symetryczne strat napięcia na tych elementach zależą tylko od jednakoimennych składowych symetrycznych prądów.

Transformatory trójfazowe, zespoły takich samych transformatorów jednofazowych, dławiki przeciwwzarciowe, trójfazowe zespoły takich samych baterii kondensatorów szeregowych są elementami naturalnie symetrycznymi. Linie elektroenergetyczne są naturalnie symetryczne lub symetryczne na skutek odpowiedniego przeplecenia; jeżeli nie spełniają tych warunków, są niesymetryczne. Zakładamy jednak, że wszystkie linie w układzie są symetryczne. Poczynione założenia stosuje się powszechnie do obliczeń napięć i prądów metodą składowych symetrycznych trójfazowych.

Jeżeli pominąć odbiory, prądy pojemnościowe i upływnościowe linii elektroenergetycznych trójfazowych oraz prądy magnesujące transformatorów w sieciach normalnych, wtedy każdy symetryczny element trójfazowy statyczny (nie maszynowy) można przedstawić w układzie składowych symetrycznych trójfazowych zastępczym schematem oporowym składającym się z oporności podłużnej, równej oporności zastępczej elementu dla składowej zgodnej ( $Z_1$ ), równej z kolei oporności zastępczej elementu dla składowej przeciwniej ( $Z_2$ ).

Składowe symetryczne trójfazowe strat napięcia kolejności zgodnej i przeciwniej na elemencie symetrycznym w sieci normalnej są

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_1 = Z_1 I_1 \\ \Delta U_2 = Z_2 I_2 = Z_1 I_2 \end{array} \right\} \quad (69)$$

Zatem, opierając się na zależnościach wyrowadzonych dla strat napięcia w maszynie synchronicznej (65), otrzymamy następujące wzory na straty napięcia na rozważanym elemencie w układzie składowych grupowych.

Dla wielkości sprowadzonych na stronę sieci CPZ :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U'_{01} = Z'_{01} I'_{01} = Z'_{01} I'_{01} \\ \Delta U'_{11} = Z'_{11} I'_{11} = Z'_{11} I'_{11} \end{array} \right\} \quad (70)$$

Dla wielkości na poziomie napięcia, na którym znajduje się dany element:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_{01} = Z_{01} I_{01} \\ \Delta U_{11} = Z_{11} I_{11} \end{array} \right\} \quad (71)$$

gdzie

$$\left. \begin{array}{l} Z_{01} = 6Z_1 \\ Z_{11} = 2Z_1 \end{array} \right\} \quad (72)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} Z'_{01} &= \vartheta^2 Z_{01} \\ Z'_{11} &= \vartheta^2 Z_{11} \\ \Delta U'_{01} &= \vartheta e^{jH30} \Delta U_{01} \\ \Delta U'_{11} &= \vartheta e^{jH30} \Delta U_{11} \\ I'_{01} &= \frac{1}{\vartheta} e^{jH30} I_{01} \\ I'_{11} &= \frac{1}{\vartheta} e^{jH30} I_{11} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Założymy następnie, że w sieci normalnej pracują symetryczne elementy poprzeczne, jak: dławiki lub oporności magnesujące transformatorów, kondensatory lub skupione pojemności linii, skupione oporności upływnościowe linii i bezródłowe odbiory.

Składowe symetryczne napięć fazowych na tych elementach (gałęziach) poprzecznych spełniają następujące oczywiste równania:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Y_1^{-1} I_1 \\ U_2 &= Y_2^{-1} I_2 \\ U_0 &= Y_0^{-1} I_0 \end{aligned} \right\}, \quad (74)$$

gdzie:  $Y_1$ ,  $Y_2$  i  $Y_0$  przewodności elementu dla składowych symetrycznych: zgodnej ( $Y_1$ ), przeciwej ( $Y_2$ ) i zerowej ( $Y_0$ ),

$I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_0$  — składowe symetryczne — zgodna ( $I_1$ ), przeciwna ( $I_2$ ) i zerowa ( $I_0$ ) prądów przewodnościowych przepływających przez fazy gałęzi poprzecznej.

Przy pracy normalnej układu elektroenergetycznego lub przy błędach w sieci CPZ po stronie sieci normalnej jest  $U_0 = 0$ , o czym już napisano.

Korzystając z równań (50), (41) i (60) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} U_{01} &= Y_{01_{01}}^{-1} I_{01} + Y_{01_{11}}^{-1} I_{11} \\ U_{11} &= Y_{11_{01}}^{-1} I_{01} + Y_{11_{11}}^{-1} I_{11} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

gdzie:  $U_{01}$  i  $U_{11}$  — napięcia na elemencie poprzecznym w sieci normalnej w układzie składowych grupowych kolejności 01 i 11,

$I_{01}$  i  $I_{11}$  — prądy przewodnościowe w elemencie poprzecznym w sieci normalnej w układzie składowych grupowych kolejności 01 i 11,

$Y_{01_{01}} = Y_{01}$  — przewodność poprzeczna elementu w układzie składowych grupowych kolejności 01 napięcia i prądu,

$Y_{11_{11}} = Y_{11}$  — jak  $Y_{01}$ , lecz w układzie składowych grupowych kolejności 11 napięcia i prądu.

$Y_{01_{11}}$  — przewodność poprzeczna elementu w układzie składowych grupowych napięcia kolejności 01 i prądu kolejności 11,

$Y_{11_{01}}$  — jak  $Y_{01_{11}}$ , lecz w układzie składowych grupowych napięcia kolejności 11 i prądu kolejności 01.

Przewodności te są:

$$\left. \begin{array}{l} Y_{01_{01}} = Y_{01} = 3(Y_1 + Y_2) \\ Y_{11_{11}} = Y_{11} = Y_1 + Y_2 \\ Y_{01_{11}} = -Y_{11_{01}} = j\sqrt{3}(Y_2 - Y_1) \end{array} \right\} \quad (76)$$

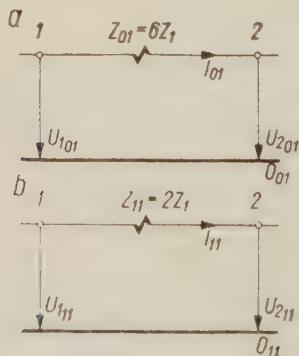
Dla elementu symetrycznego, dla którego  $Y_1 = Y_2$ , będzie

$$\left. \begin{array}{l} Y_{01} = 6Y_1 \\ Y_{11} = 2Y_1 \\ Y_{01_{11}} = -Y_{11_{01}} = 0 \end{array} \right\} \quad (76a)$$

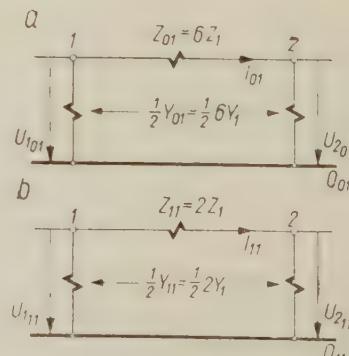
Przewodności w układzie składowych grupowych sprowadzone na stronę sieci CPZ spełniają zależności:

$$\left. \begin{array}{l} Y'_{01} = \vartheta^{-2}Y_{01} \\ Y'_{11} = \vartheta^{-2}Y_{11} \end{array} \right\} \quad (77)$$

W oparciu o zawarte w niniejszym rozdziale rozważania i zależności podano niżej na rysunkach zastępcze schematy oporowe symetrycznych elementów sieci normalnej w układzie składowych grupowych kolejności 01 i 11 i tak:



Rys. 4. Schematy zastępcze symetrycznych elementów trójfazowych, nie zawierających przewodności, w układzie składowych symetrycznych grupowych — a. kolejności 01, b. kolejności 11.



Rys. 5. Schematy zastępcze (w postaci  $\pi$ ) symetrycznej linii trójfazowej, zawierającej przewodności, w układzie składowych symetrycznych grupowych — a. kolejności 01, b. kolejności 11.

na rys. 4 dla linii zawierającej tylko oporności podłużne oraz dla dławików i kondensatorów szeregowych, jak również dla transformatorów, w których nie uwzględniono prądu magnesującego,

na rys. 5 dla linii zawierającej oporności podłużne i poprzeczne (w układzie  $\pi$ ),

na rys. 6 dla transformatorów trójuzwojenniowych, dla których uwzględniono prąd magnesujący.

Sposób obliczania oporności zastępczych symetrycznych elementów sieci normalnej dla składowej symetrycznej zgodnej ( $Z_1$ ), od której zależą oporności w układzie składowych grupowych kolejności 01 ( $Z_{01}$ ) i kolejności 11 ( $Z_{11}$ ), jest powszechnie znany. Uwaga ta dotyczy również obliczenia przewodności dla składowej symetrycznej zgodnej ( $Y_1$ ), od której zależą przewodności w układzie składowych grupowych kolejności 01 ( $Y_{01}$ ) i kolejności 11 ( $Y_{11}$ ).

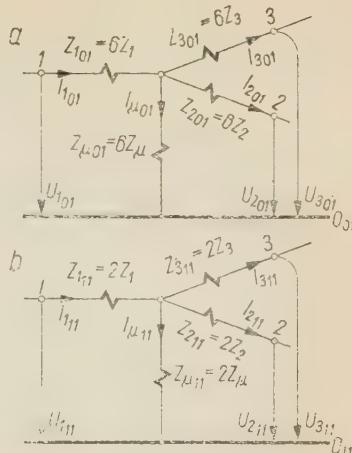
### 5. UWAGI KOŃCOWE

Podane w pracy zależności mogą być podstawą szczegółowych rozważań nad własnościami maszyn synchronicznych w układzie składowych symetrycznych grupowych. Z praktycznego punktu widzenia istotnym zagadnieniem do rozwiązania jest podanie metody obliczeń składowej aperiodycznej prądu, jaka pojawia się przy zwarciach w układzie elektroenergetycznym, metodą składowych symetrycznych grupowych. Problem ten może być tematem oddzielnej pracy.

W oparciu o zawarte w pracy wzory i schematy zastępcze można w prosty sposób ustalić zastępcze schematy czynnych odbiorców, zawierających źródła SEM-nych, w układzie składowych grupowych.

Wyniki niniejszej pracy mogą mieć również zastosowanie do badania pracy równoległej maszyn synchronicznych, zwłaszcza równowagi dynamicznej przy zwarciach w sieciach typu CPZ.

Jednak główna przydatność podanych tu wzorów i schematów zastępczych sprowadza się do obliczenia składowej okresowej prądów zwarciowych i ich rozprływu oraz rozkładu napięć w układzie elektroenergetycznym przy zwarciach w sieciach typu CPZ, jak również do obliczenia prądów i napięć w układzie przy przerwach w fazach sieci tego typu.



Rys. 6. Pełne schematy zastępcze transformatora trójuzwojennego pracującego w sieci trójfazowej trójprzewodowej w układzie składowych symetrycznych grupowych — a. kolejność 01, b. kolejność 11.

Autor wyraża w tym miejscu wdzięczność mgowi inż. Andrzejowi Przyłuskiemu, recenzentowi niniejszej pracy, za wnikliwe i cenne uwagi, dzięki którym praca ta mogła być wydana w tej postaci.

Zakład Elektroenergetyki  
Politechniki Łódzkiej

#### WYKAZ LITERATURY

1. Elbin L. E.: *Ekonomicznyje schemy elektropieredaczi i metody ich razszczota*. Elektrichestwo, nr 1, 1952.
2. Kowalski Zb.: *Schematy i oporności zastępcze transformatorów pracujących w układach przesyłowych typu „cztery przewody - ziemia” dla składowych symetrycznych*. Rozprawy Elektrot. nr 1, 1958.
3. Kowalski Zb.: *Oporności i schematy zastępcze napowietrznych linii średnich napięć typu „cztery przewody - ziemia”*. Rozprawy Elektrot. nr 3, 1958.
4. Kowalski Zb.: *Oporności elektroenergetycznych linii typu „cztery przewody - ziemia” w układzie składowych symetrycznych grupowych*. Archiwum Elektrot. nr 4, t. VII, 1958.

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНХРОННЫХ МАШИН И ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХФАЗНЫХ ТРЕХПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ В СИСТЕМЕ СИММЕТРИЧНЫХ ГРУППОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

#### Резюме

Теория симметричных групповых составляющих применяется к расчетам токов и напряжений в электроэнергетических системах при ошибках в сетях типа «четыре - провода - земля» (в сокращении ЧПЗ).

Основной задачей сей работы является указание метода расчета заместительных сопротивлений и заместительных схем синхронных машин и элементов трехфазных трехпроводных сетей, работающих совместно с сетями типа ЧПЗ в системе симметричных групповых составляющих.

Настоящая работа является также дальнейшим развитием теории расчетов электроэнергетических сетей типа ЧПЗ по методу групповых составляющих, данного Л. Е. Эбним [1].

Данные в сей работе зависимости относятся к основной гармонике напряжений и токов.

Принято предположение, что симметричные трехфазные синхронные машины (генераторы компенсаторы) работают в трехфазных трехпроводных сетях и соединены с сетями ЧПЗ при помощи пар таких же трансформаторов. Группы соединений трансформаторных пар отличаются друг от друга на 180° электрических градусов.

Симметричные групповые составляющие токов трансформируются на вторичную сторону трансформаторов в трехфазную сеть. В фазах трехфазной трехпроводной сети, называемой нормальной сетью текут только трансформированные групповые составляющие токов последовательности 01, 11, а трансформированные групповые составляющие последовательности 00 и 10 текут в обмотках трансформаторов и через соединительные провода зажимов тех же трансформаторных фаз со стороны нормальной сети.

Синхронные машины, работающие в нормальной сети являются источниками групповых составляющих токов последовательности 01 и 11 при всяких состоя-

ниях работы сети типа ЧПЗ. Источники тока в нормальных сетях являются также косвенно источниками групповых составляющих последовательности 00 и 10, однако составляющие последовательностей 00 и 10 не текут через эти источники.

По принятому предположению теория групповых составляющих применима только к расчетам напряжений и токов в электроэнергетической системе при анализе состояний работы в сети ЧПЗ. Таким образом в этом случае в нормальной сети не имеется симметричных трехфазных составляющих напряжений и токов нулевой последовательности, так как эти составляющие в сети типа ЧПЗ не существуют.

Рассмотрена синхронная машина (синхронный генератор), работающая на собирательные шины в нормальной сети. Характеристики этого генератора: симметричная система электродвижущих сил:  $E_1 = E_1$ ,  $E_2 = a^2 E_1$  и  $E_3 = a E_1$ , где  $E_1$  — симметричная согласная трехфазная составляющая электродвижущих сил, а также сопротивления симметричных трехфазных составляющих: согласное ( $Z_1$ ), противоположное ( $Z_2$ ) нулевое.

Разлагая разные токи и напряжения на зажимах генератора на трехфазные симметричные составляющие и применяя закон преобразования этих составляющих на сторону сети ЧПЗ, получены уравнения (40) и (41), связывающие групповые составляющие токов в нормальной сети, сведенных на уровень сети ЧПЗ и симметричные трехфазные составляющие токов в нормальной сети, а также уравнения (50) и (51), дающие зависимости соотношения связи между симметричными трехфазными составляющими напряжений в нормальной сети и групповыми составляющими напряжений в нормальной сети, сведенными на уровень сети ЧПЗ.

Принимая во внимание зависимости (40) и (50) и другие — получены уравнения (52) по отношению к величинам сведенным на уровень сети ЧПЗ и уравнения (59) для величин на уровне нормальной сети, являющиеся основными зависимостями между групповыми составляющими напряжений, электродвижущих сил и сопротивлений синхронных машин в системе групповых симметричных составляющих.

Электродвижущие силы генератора с последовательностью 01 и 11 ( $E_{01}$ ,  $E_{11}$ ) в системе групповых составляющих выражены в функции симметричных трехфазных составляющих электродвижущих сил согласной последовательности ( $E_1$ ) (54). Таким же образом заместительные сопротивления генератора в системе групповых составляющих ( $Z_{01_{01}}$ ,  $Z_{01_{11}}$ ,  $Z_{11_{11}}$ ,  $Z_{11_{01}}$ ) даны в функции заместительных сопротивлений генератора для согласной ( $Z_1$ ) и противоположной ( $Z_2$ ) симметричных трехфазных составляющих (55).

В машине, для которой  $Z_1 = Z_2$  (турбогенераторы, компенсаторы)  $Z_{01_{01}} = Z_{01} = 6Z_1$ ,  $Z_{11_{11}} = Z_{11} = 2Z_1$ , а также  $Z_{01_{11}} = 0$ ,  $Z_{11_{01}} = 0$ .

В практических вычислениях в большинстве случаев можно предположить для всех синхронных машин  $Z_1 = Z_2$  и пользоваться простыми заместительными схемами машин, данными в работе (рис. 3).

Заместительные синхронные машины в системе групповых составляющих являются искусственными творениями.

Их свойства могут быть определены, основываясь на известных свойствах машин для симметричных трехфазных составляющих.

Принято предположение, что все элементы трехфазной трехпроводной сети являются симметричными элементами для симметричных трехфазных составляющих.

Основываясь на результатах поданных в 3 части работы получены следующие зависимости продольных сопротивлений элементов нормальной сети для групповых составляющих  $Z_{01}=6Z_1$ ,  $Z_{11}=2Z_1$  и  $Z_{0111}=0$ ,  $Z_{1101}=0$ , причем  $Z_1$  — продольное сопротивление элемента нормальной сети для согласной симметричной трехфазной составляющей.

Рассчитаны тоже проводимости элементов нормальных сетей для групповых составляющих, а именно:

$$Y_{01}=6Y_1 \text{ и } Y_{11}=2Y_1,$$

а также (предполагая  $Y_1=Y_2$ )

$$Y_{0111}=0 \text{ и } Y_{1101}=0,$$

где  $Y_1$  — поперечная проводимость элемента нормальной сети для симметричной трехфазной составляющей согласной последовательности.

В работе даны заместительные схемы сопротивлений типичных элементов трехфазной трехпроводной сети в системе групповых составляющих (рис. 4, 5 и 6).

Дано обоснование, что между величинами в нормальной сети и аналогичными величинами, сведенными на уровень сети ЧПЗ в системе симметричных групповых составляющих, имеют место зависимости (57), (60) и (61), приводя основание преобразования групповых составляющих.

В заключении упомянуты некоторые проблемы, связанные с темой работы и вкратце дано несколько применений результатов работы.

#### REPRESENTATION OF SYNCHRONIC MACHINES AND ELEMENTS OF THREE-PHASE THREE-WIRE POWER LINES IN SYSTEM OF GROUP SYMMETRICAL COMPONENTS

##### Summary

The theory of the group symmetrical components has found the application in the evaluations of the currents and voltages in the electric power systems incorporating the faults in the lines of „four wire ground” type briefly denoted as FWG (CPZ).

The main object of the paper is to present a calculation method for the equivalent impedances, equivalent schemes of the synchronic machines and the elements of three-phase three-wire power lines collaborating with the lines of FWG (CPZ) type in the system of group symmetrical components.

Actually the work develops the calculation theory of the electric power systems of FWG type with the aid of the group component method introduced by I. E. Ebin (1).

The dependencies mentioned in the paper refer to the fundamental harmonic of the voltages and currents.

It has been assumed that the symmetrical three-phase synchronic machines as generators compensators are operating within three-phase three-wire power line and are lined with the line of FWG type through the pairs of transformers of the same kind. The groups of the transformer connections in the pair differ between themselves by  $180^\circ$  electrical degrees.

The symmetrical group components of the currents are being transformed into three-phase line on the secondary side of the transformers. In the phases of three-phase three-wire power line coiled as the normal power line only transformed

group components of the currents of the sequence 01, 11 are flowing, whilst the transformed group components of the sequence 00 and 10 are flowing through transformer windings and conductors connecting the clamps of the same transformer phases from the normal line side.

The synchronic machines incorporated in normal power line are the sources of group components of the currents of sequence 01 and 11 at all work states of the line of FWG type. The current sources of the normal line are at the same time the intermediate sources of the group components of the sequence 00 and 10, but the components of the sequence 00 and 10 do not flow through these sources.

It has been assumed that the group component theory is applicable only to the voltage and current calculations in the electric power system by the analysis of work states in the line of PWG type.

In such a case therefore, there is no in normal power line of the symmetrical components of three phase voltages and currents of zero sequence, because these components do not exist in the line of FWG type.

A synchronic machine (synchronic generator) that operates in the normal power line on the mains is then discussed. This generator is distinctive by

1. symmetrical system of the electromotive forces,

$$E_A = E_1, \quad E_B = a^2 E_1, \quad \text{and} \quad E_C = a E_1,$$

where  $E_1$  — three phase symmetrical component of the coinciding sequence of the electromotive forces,

2. resistances for three-phase symmetrical components,  $(Z_1)$  — coinciding ( $Z_2$ ) — opposite and  $(Z_0)$  — zero sequence.

By resolution of phase voltages and currents on the generator clamps into three-phase symmetrical components and applying the transformation law to these components on the side of FWG line the equations (40) and (41) linking the current group components of the normal line converted into the level of FWG line and three-phase symmetrical components of currents of the normal line were obtained.

Besides of it the equations (50) and (51) giving the dependencies between the three-phase symmetrical components of the voltages and the group components of the voltage in normal line converted into the level of FWG line were also obtained.

Taking into account the dependencies (40), (50) and others the equation (52) relating to the magnitudes converted into the level of FWG line and the equation (59) for the magnitudes converted into the level of conventional network were received.

These equations are the fundamental dependencies between the group components of the voltages, electromotive forces and impedances of the synchronous machines in the system of the symmetrical group components.

The electromotive forces of generator of the sequence 01 and 11 ( $E_{01}$  and  $E_{11}$ ) in the system of the group components are expressed in function of three-phase symmetrical components of the electromotive forces of the coinciding sequence ( $E_1$ ) (54). Similarly the equivalent impedances of the generator in the system of the group components ( $Z_{0101}$ ,  $Z_{0111}$ ,  $Z_{1111}$ ,  $Z_{1101}$ ) are given in function of the generator equivalent impedances of three-phase symmetrical components coinciding ( $Z_1$ ) and opposite ( $Z_{01}$ ) (55).

For the machine with  $Z_1 = Z_2$  (turbogenerators, compensators)  $Z_{0101} = Z_{01} = 6Z_1$ .

$$Z_{1111} = Z_{11} = 2Z_1$$

$$\text{and } Z_{0111} = 0, \quad Z_{1101} = 0.$$

For most cases in practical calculations it may be assumed for all synchronous machines that  $Z_1 = Z_2$  and then the use of the simple equivalent circuits of the machines incorporated in the work (Fig. 3) may be made.

The equivalent synchronous machines in the system of the group components are rather on artificial concept. Their properties may be defined on the basis of the known properties of the machines for three-phase symmetrical components.

Farther it has been assumed that the elements of three-phase three-wire power line are symmetrical elements for three-phase symmetrical components.

On the basis of the results given in part 3 of the paper the following dependencies for the longitudinal impedances of normal power line elements for the group components are obtained  $Z_{01} = 6Z_1$ ,  $Z_{11} = 2Z_1$  and  $Z_{0111} = 0$ ,  $Z_{1101} = 0$ , where

$Z_1$  = longitudinal impedance of the normal power line element for three-phase symmetrical component of coinciding sequence.

The conductances of the normal power line elements are also evaluated as follows

$$Y_{01} = 6Y_1, \quad Y_{11} = 2Y_1 \text{ and}$$

under assumption  $Y_1 = Y_2$

$$Y_{0111} = 0, \quad Y_{1101} = 0,$$

where

$Y_1$  = lateral conductance of the normal power line element for three-phase symmetrical component of coinciding sequence.

The equivalent schemes of the typical normal of three-phase three-wire power line in the system of the group components are given (Fig. 4, 5, 6).

It has been proved that between the magnitudes of the normal power line and analogous magnitudes converted into the level of FWG line in the system of symmetrical group components exist the following dependencies (57), (60) and (61) which give the transformation principle of the group components.

Finally some problems connected with the subject of the work are then mentioned and a few application of the work results presented.

621.316.1.025.3 : 621.3.028

Z. KOWALSKI

## Oporności elektroenergetycznych linii typu „cztery przewody-ziemia“ w układzie składowych symetrycznych grupowych

*Rękopis dostarczono 31. 1. 1958 r.*

Przedstawiono próbę rozwiązania zagadnienia oporności napowietrznych linii średnich napięć bez liniek odgromowych typu „cztery przewody-ziemia“ (CPZ) w układzie składowych symetrycznych grupowych.

Na początku podano ogólne własności linii typu CPZ, a następnie ogólne podstawy teorii składowych symetrycznych grupowych w zastosowaniu do obliczania linii i sieci typu CPZ; dalej — zasadnicze równania na straty napięcia i oporności w normalnych warunkach pracy linii CPZ i jej szczególne własności w tym stanie.

W oparciu o wymienione równania i podstawowe zależności dla składowych grupowych wyprowadzono wzory dla składowych grupowych strat napięcia w funkcji składowych grupowych prądów poszczególnych kolejności w linii CPZ. W założeniu, że linia typu CPZ jest symetryczna, podano zasadnicze zależności na oporności zastępcze linii CPZ dla składowych grupowych poszczególnych kolejności i zastępcze schematy oporowe linii CPZ dla tych składowych.

Po zbadaniu szeregu własności linii CPZ w warunkach normalnych i w układzie składowych symetrycznych grupowych przedstawiono praktyczne wzory do obliczania oporności linii tego typu dla składowych grupowych.

W zakończeniu omówiono w skrócie niektóre problemy obliczania sieci, w których pracują linie typu CPZ.

### 1. WSTĘP

W 1952 roku zostały opublikowane prace Andrejewa [1] i Filsztinskiego [6] o nowym sposobie przesyłania energii elektrycznej za pomocą układów przesyłowych typu „cztery przewody-ziemia“ (w skrócie: CPZ). W tym samym czasie Ebin [5] poruszył zagadnienie obliczania linii typu CPZ w stanie normalnej pracy i przy zwarciach, podał podstawy teorii składowych symetrycznych grupowych i jej niektóre zastosowania do obliczania prądów zwarciowych w liniach tego typu.

Celem tej pracy jest dalsze rozwinięcie idei obliczeń sieci typu CPZ w stanach zakłócienniowych metodą składowych symetrycznych grupowych, a w szczególności podanie metod obliczeń zastępczych oporności linii średnich napięć typu CPZ bez przewodów odgromowych dla składowych symetrycznych grupowych. Poza tym w pracy podane będą ogólne własności linii tego typu w układzie składowych symetrycznych grupowych.

Praca ta ma być również uzupełnieniem pracy autora [10] dotyczącej obliczeń oporności linii typu CPZ bez i z przewodami odgromowymi w warunkach normalnych i dla składowych symetrycznych grupowych.

W pracy [10] przy obliczaniu oporności linii CPZ dla składowych grupowych założono, że linia jest symetryczna nie wnikając w szczegóły tego zagadnienia. Praca niniejsza ma dać odpowiedź, w jakich warunkach zachodzi taka symetria i czy linia CPZ jest symetryczna dla składowych grupowych przy jej 4-sekcyjnym przepleceniu przyjętym przez autora w celu uzyskania symetrii linii w warunkach pracy normalnej.

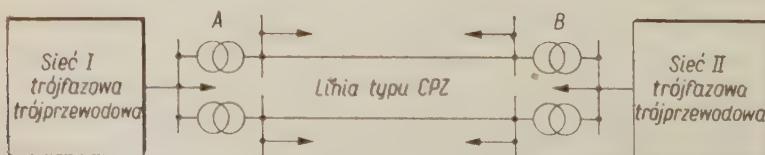
Niektóre zagadnienia, których podanie autor uważa za celowe do zrozumienia niniejszej pracy i nadania jej jednolitej formy, są przejęte z pracy [10], lecz na ogół odmiennie potraktowane.

Znajomość sposobów obliczania zastępczych oporności linii typu CPZ, jak również wszystkich elementów sieci, w której pracuje linia tego typu, jest nieodzowna przy obliczaniu sieci typu CPZ metodą składowych symetrycznych grupowych w stanach zakłócienniowych, a więc przede wszystkim przy zwarcia i przerwach w fazach sieci tego typu.

W niniejszej pracy rozważone będą napowietrzne linie typu CPZ średnich napięć bez przewodów odgromowych. Przy obliczaniu linii trójfazowych trójprzewodowych, zwanych tu liniami normalnymi, średnich napięć (do 40 kV włącznie) na ogół pomija się upływności i pojemności linii. Podobnie wielkości tych nie będziemy tu uwzględniać i przy obliczaniu linii typu CPZ.

## 2. OGÓLNE WŁASNOŚCI LINII TYPU CPZ

Na rys. 1 pokazano fragment sieci, w której pracuje linia typu CPZ średniego napięcia, np. 30 kV.



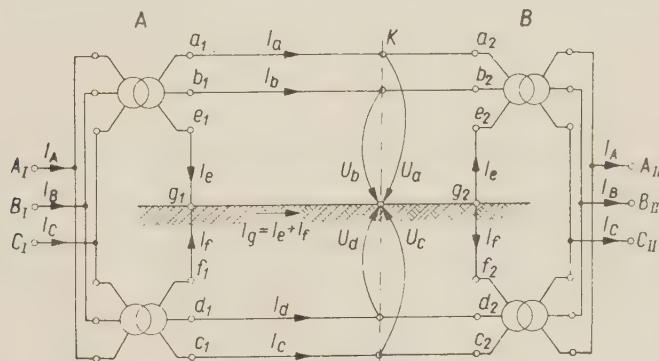
Rys. 1. Fragment sieci z układem przesyłowym typu CPZ.

Linia typu CPZ może być otwarta lub zamknięta. Zespół linii tego typu może tworzyć sieć, zwaną siecią typu CPZ. W układzie elektroenergetycznym może pracować kilka sieci typu CPZ o różnych napięciach znamionowych.

Linie typu CPZ wykazują pewne istotne zalety w porównaniu z liniami normalnymi. W liniach CPZ ziemia zastępuje niejako dwa przewody linii normalnej dwutorowej, przy czym w ziemi jako przewodzie nie występują straty mocy lub są pomijalnie małe w warunkach pracy normalnej, ponieważ prąd płynący przez ziemię jest równy zeru lub pomijalnie mały. Tę cenną zaletę linii CPZ uzyskuje się kosztem wzrostu napięć przewodów linii w stosunku do ziemi i powiększenia napięć międzyprzewodowych. W sieciach średnich napięć o izolowanym punkcie zerowym i w sieciach skompensowanych wszystkie na ogół elementy sieci i przyrządy mają izolację przystosowaną do stałej pracy pod napięciem znamionowym sieci, a więc pod napięciem międzyfazowym. Te elementy i przyrządy mogą być więc zastosowane do sieci typu CPZ.

Z powyższego wynika, że linie typu CPZ są znacznie tańsze w porównaniu z liniami normalnymi i mogą znaleźć zastosowanie w praktyce, zwłaszcza w zakresie średnich napięć. W porównaniu z jednotorową linią trójfazową trójprzewodową linią typu CPZ można przesyłać dwukrotnie większą moc kosztem podwieszenia czwartego przewodu.

Rozważamy tu prosty układ przesyłowy złożony z jednej linii typu CPZ i z dwóch par transformatorów po jednej na obu końcach układu. Na rys. 2 pokazano schemat takiego układu.



Rys. 2. Schemat układu przesyłowego typu CPZ.

Linia CPZ, jak to widać na rys. 2, składa się z dwóch charakterystycznych części: dwóch linii typu „dwa przewody-ziemia“ (DPZ), przy czym ziemia jest tu wspólnym przewodem powrotnym obu linii DPZ. Zatem linia CPZ jest podwójną linią typu DPZ o specyficznych własnościach. Każdą charakterystyczną część linii CPZ nazywać będziemy w ni-

niejszej pracy o tem linii CPZ, mimo że określenie to nie jest zgodne z polskim słownictwem elektrotechnicznym.

Transformatory na stacjach A i B mają takie układy i grupy połączeń, że prądy i napięcia w odpowiadających sobie fazach w każdym torze linii przesunięte są względem siebie o  $180^\circ$ , jeżeli w sieci normalnej układy prądów i napięć są układami symetrycznymi. Jeśli przez  $H_1$  oznaczyć grupę połączeń (w godzinach umownych) jednego transformatora, zaś przez  $H_2$  — grupę połączeń drugiego takiego samego transformatora na stacji A lub B (rys. 2), wówczas warunek

$$H_2 - H_1 = 6 \quad (1)$$

jest konieczny do prawidłowej pracy linii CPZ, jeżeli po stronie linii CPZ zostaną uziemione te same fazy transformatorów.

Prądy płynące w poszczególnych fazach każdego toru linii CPZ spełniają następujące oczywiste związki:

$$\left. \begin{array}{l} I_a + I_b + I_e = 0^1 \\ I_c + I_d + I_f = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Prąd powrotny płynący w ziemi

$$I_g = I_e + I_f = (I_a + I_b + I_c + I_d). \quad (3)$$

Jeżeli układ prądów ( $I_A$ ,  $I_B$  i  $I_C$ ) w fazach sieci normalnej, sprzęgniętej z linią CPZ za pośrednictwem pary takich samych transformatorów, jest układem symetrycznym, wtedy symetryczne są układy prądów w obu torach odpowiednio symetrycznej linii CPZ, tj. słuszne są równania:

$$\left. \begin{array}{l} I_b = a^2 I_a, \quad I_e = a I_a \\ I_d = a^2 I_c, \quad I_f = a I_c \end{array} \right\} \quad (4)$$

gdzie  $a$  — operator charakterystyczny składowych symetrycznych trójfazowych ( $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ).

Na podstawie równania (1) i poczynionych założeń spełnione są zależności:

$$\left. \begin{array}{l} I_c = -I_a \\ I_d = -I_b \\ I_f = -I_e \end{array} \right\} \quad (5)$$

Wobec powyższego prąd powrotny płynący w ziemi  $I_g = 0$ .

Układ przesyłowy typu CPZ jest z zasady układem niesymetrycznym

<sup>1</sup> Podane w pracy symbole prądów ( $I$ ), napięć ( $U$ ), strat napięcia ( $\Delta U$ ) i oporności pozornych ( $Z$ ) są wielkościami zespolonymi.

elektrycznie. Jako element sieci wpływa na wartości i fazy prądów i napięć w sieci. Stąd układy prądów i napięć w sieci nie są układami symetrycznymi mimo założenia, że odbiory w sieci są symetryczne. To jest przyczyną, że w ziemi pod linią CPZ płynie pewien prąd, którego wartość można jednak pominąć w obliczeniach praktycznych, czego dowodzić tu nie będziemy.

Na rys. 3 podano wykres wskazowy napięć i prądów w dowolnym punkcie K linii CPZ przy założeniu, że układy napięć w tym punkcie linii i układy prądów w obu torach linii są symetryczne.

Jak wynika z wykresu na rys. 3, napięcia obu faz toru linii CPZ w stosunku do ziemi są równe napięciu międzyprzewodowemu. Napięcia między fazami obu torów są większe od napięcia międzyprzewodowego każdego toru  $\sqrt{3}$  (np. między fazami  $a$  i  $d$ ) i 2 razy (np. między  $a$  i  $c$ ).

W linii CPZ będziemy wyróżniać napięcia międzyprzewodowe oraz napięcia między nieuziemionymi fazami linii (fazy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ ) i ziemią pod linią. Te ostatnie będą tu nazywać napięciami fazowymi doziemnymi lub krócej napięciami fazowymi. Wszystkie z wymienionych napięć są napięciami międzyfazowymi, bowiem ziemia spełnia również rolę fazy.

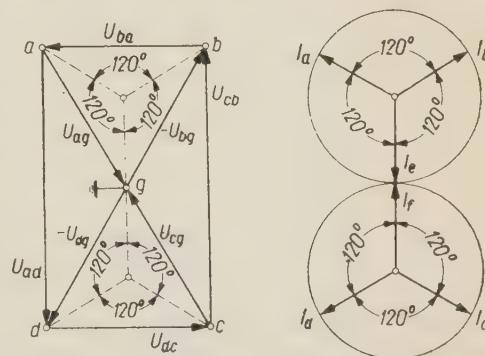
Napięciem znamionowym linii CPZ nazwiemy napięcie znamionowe każdego toru linii, równe napięciu znamionowemu międzyprzewodowemu ( $U_n$ ) tego toru. Wobec tego możemy napisać:

$$\left. \begin{array}{l} |U_{ab}| = |U_{ag}| = |U_{bg}| = U_n \\ |U_{cd}| = |U_{cg}| = |U_{dg}| = U_n \\ |U_{ad}| = |U_{bc}| = \sqrt{3} U_n \\ |U_{ac}| = |U_{bd}| = 2U_n \end{array} \right\} \quad (6)$$

Przy zamianie przewodów  $c$  i  $d$  drugiego toru linii:

$$\begin{aligned} |U_{ac}| &= |U_{bd}| = \sqrt{3} U_n \\ |U_{ad}| &= |U_{bc}| = 2U_n. \end{aligned}$$

Zależności (6) mają wpływ na wybór izolacji i odstępów między przewodami linii oraz izolacji urządzeń w stacjach powiązanych z linią CPZ.



Rys. 3. Wykres wskazowy napięć i prądów w linii typu CPZ.

### 3. RÓWNANIA PODSTAWOWE DLA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH W UKŁADZIE PRZESYŁOWYM TYPU CPZ

Prądy i napięcia fazowe w  $n$  przewodach linii  $n$ -fazowej można rozłożyć na  $n$  składowych symetrycznych  $n$ -fazowych wg wzoru podanego przez Rosenzweiga [8] i Wagnera [9], który tu napiszemy w postaci

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{a=n} A_a \cdot a_{k,a}, \quad (7)$$

gdzie:

$A_k$  —  $k$ -ta składowa symetryczna prądów lub napięć, przy czym  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ,

$A_a$  — prąd lub napięcie fazy  $a$ , gdzie  $a=1, 2, \dots, n$ ,

$n$  — liczba faz,

$a_{k,a}$  — operator charakterystyczny składowych symetrycznych  $k$ -tych ( $k$ -tej kolejności), inaczej: współczynnik fazowy określający przesunięcie fazowe między składowymi symetrycznymi  $k$ -tej kolejności;

$$a_{k,a} = e^{j k (a-1) \frac{2\pi}{n}}. \quad (8)$$

Między składowymi symetrycznymi  $k$ -tej kolejności w każdej fazie w układzie składowych symetrycznych zachodzi zależność

$$A_{a_k} = \frac{A_k}{a_{k,a}}. \quad (9)$$

Jeżeli znane są składowe symetryczne prądów lub napięć  $A_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) (w fazie podstawowej), wtedy prądy lub napięcia w fazie  $a$  są równe

$$A_a = \sum_{k=0}^{k=n-1} A_{a_k} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{A_k}{a_{k,a}}. \quad (10)$$

Linię typu CPZ można traktować jako linię czterofazową. Układem odniesienia napięć fazowych linii jest w tym przypadku ziemia pod linią. W takim razie oznaczając przez  $A_a, A_b, A_c$  i  $A_d$  ( $a=a, b, c$  i  $d$ )<sup>2</sup> prądy lub napięcia fazowe w linii, otrzymamy na podstawie powyższych wzorów następujące zależności na składowe symetryczne ( $A_0, A_1, A_2$  i  $A_3$ ) w zależności od wielkości fazowych i odwrotnie, a mianowicie:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & +j, & -1, & -j \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -j, & -1, & +j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{bmatrix}, \quad (11)$$

<sup>2</sup> We wzorze (8) i innych należy przyjąć:  $a=1, b=2, c=3, d=4$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -j, & -1, & +j \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & +j, & -1, & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Jak się okaże, rozkład napięć lub prądów na składowe symetryczne wg zależności (11) nie jest jedyny.

W linii typu CPZ można wyodrębnić dwa układy dwufazowe sprzężone ze sobą indukcją wzajemną, przy czym każdy z tych układów składa się z dwóch przewodów odpowiednio połączonych z transformatorami na początku i końcu linii. Każdy z tych układów jest linią typu „dwa przewody — ziemia” (DPZ). Napięcia i prądy w każdej linii DPZ możemy rozłożyć na 2-fazowe składowe symetryczne wg wyżej podanych zależności ogólnych, a mianowicie:

w jednej linii DPZ (fazy *a* i *b*) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} A_{0(1)} \\ A_{1(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$i \quad \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0(1)} \\ A_{1(1)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

w drugiej linii DPZ (fazy *c* i *d*) będziemy mieli

$$\begin{bmatrix} A_{0(2)} \\ A_{1(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c \\ A_d \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$i \quad \begin{bmatrix} A_c \\ A_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0(2)} \\ A_{1(2)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Składowe symetryczne dwufazowe kolejności zerowej  $A_{0(1)}$  i  $A_{0(2)}$  ogólnie nie są sobie równe; składowe te tworzą nowy układ dwufazowy.

Składowe symetryczne dwufazowe kolejności zgodnej  $A_{1(1)}$  i  $A_{1(2)}$  ogólnie nie równają się sobie i również tworzą nowy układ dwufazowy.

Rozkładając te składowe symetryczne dwufazowe podobnie jak wielkości  $A_a$  i  $A_b$  oraz  $A_c$  i  $A_d$  w obu częściach linii CPZ według wzorów (13) i (15), otrzymamy w ten sposób składowe symetryczne kolejności zeroowej i zgodnej składowych symetrycznych dwufazowych kolejności zerowej i zgodnej napięć lub prądów w fazach linii CPZ.

Ujmując to matematycznie będziemy mieli

$$\begin{bmatrix} A_{00} \\ A_{01} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0(1)} \\ A_{0(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{bmatrix} \quad (17)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1(1)} \\ A_{1(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{bmatrix} \quad (18)$$

Równania (17) i (18) możemy napisać w postaci jednego równania macierzowego, a mianowicie

$$\mathbf{A}_{kg} = \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{00} \\ A_{11} \\ A_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{bmatrix} \quad (19)$$

Odwrotnie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \\ A_c \\ A_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{00} \\ A_{11} \\ A_{10} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Składowe  $A_{01}$ ,  $A_{00}$ ,  $A_{11}$  i  $A_{10}$  nazywają się składowymi symetrycznymi grupowymi w odróżnieniu od właściwych (normalnych) składowych symetrycznych  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$ .

Składowa  $A_{01}$  jest to składowa symetryczna grupowa kolejności 01 (zero-jeden),  $A_{00}$  — jak wyżej, lecz kolejności 00 (zero-zero),  $A_{11}$  — jak wyżej, lecz kolejności 11 (jeden-jeden),  $A_{10}$  — jak wyżej, lecz kolejności 10 (jeden-zero).

W dalszym ciągu pracy składowe symetryczne grupowe nazywać będziemy krótko: „składowe grupowe“.

Macierz

$$\mathbf{S}_{1gr} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

można nazwać — podobnie jak w teorii składowych symetrycznych trójfazowych [4] — macierzą operatorową składowych symetrycznych grupowych.

W układzie składowych symetrycznych normalnych podobna macierz operatorowa (12) jest równa

$$\mathbf{S}_{1n} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -j, & -1, & +j \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & +j, & -1, & -j \end{bmatrix} \quad (22)$$

Porównując macierze operatorowe  $\mathbf{S}_{1g}$  i  $\mathbf{S}_{1n}$  widać, że macierz operatorowa składowych grupowych nie zawiera liczb urojonych ( $+j$  i  $-j$ ). Nie wnikając w szczegóły, można na podstawie tego porównania sądzić o przewadze rachunkowej składowych symetrycznych grupowych nad składowymi symetrycznymi normalnymi przy obliczaniu stanów awaryjnych w sieciach typu CPZ.

Dla uzupełnienia podstaw teorii składowych grupowych podamy jeszcze zależności szczegółowe dla składowych symetrycznych grupowych napięć lub prądów poszczególnych faz linii CPZ w funkcji składowych grupowych fazy podstawowej ( $a=1=a$ ):

$$\begin{aligned}
 A_{b_{01}} = A_{a_{01}} &= A_{01}, & A_{b_{00}} = A_{a_{00}} &= A_{00} \\
 A_{c_{01}} = -A_{a_{01}} &= -A_{01}, & A_{c_{00}} = A_{a_{00}} &= A_{00} \\
 A_{d_{01}} = -A_{a_{01}} &= -A_{01}, & A_{d_{00}} = A_{a_{00}} &= A_{00} \\
 A_{b_{11}} = -A_{a_{11}} &= -A_{11}, & A_{b_{10}} = -A_{a_{10}} &= -A_{10} \\
 A_{c_{11}} = -A_{a_{11}} &= -A_{11}, & A_{c_{10}} = A_{a_{10}} &= A_{10} \\
 A_{d_{11}} = A_{a_{11}} &= A_{11}, & A_{d_{10}} = -A_{a_{10}} &= -A_{10}
 \end{aligned} \quad | \quad (23)$$

W celu określenia wszystkich napięć międzyprzewodowych oraz prądów w linii CPZ wystarczy znać napięcia fazowe  $U_a, U_b, U_c$  i  $U_d$  oraz prądy  $I_a, I_b, I_c$  i  $I_d$ . Inne wielkości napięć i prądów poza wymienionymi znajdują się w sposób elementarny w oparciu o prawo Kirchhoffa.

W tablicy 1 podano wykresy wskazowe składowych symetrycznych

Wykresy wskazowe składowych symetrycznych normalnych i składowych symetrycznych grupowych.

| Składowe symetryczne normalne kolejności                        |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 0   | 1  | 2  | 3  |
| $A_{a_0} \quad A_{b_0} \quad A_{c_0} \quad A_{d_0}$             | $A_{a_1} \quad A_{b_1} \quad A_{c_1} \quad A_{d_1}$            | $A_{a_2} \quad A_{b_2} \quad A_{c_2} \quad A_{d_2}$            | $A_{a_3} \quad A_{b_3} \quad A_{c_3} \quad A_{d_3}$            |
| Składowe symetryczne grupowe kolejności                         |  |  |  |
| 00  | 01   | 10   | 11   |
| $A_{a_{00}} \quad A_{b_{00}} \quad A_{c_{00}} \quad A_{d_{00}}$ | $A_{a_{01}} \quad A_{b_{01}}$<br>$A_{c_{01}} \quad A_{d_{01}}$ | $A_{a_{10}} \quad A_{c_{10}}$<br>$A_{b_{10}} \quad A_{d_{10}}$ | $A_{a_{11}} \quad A_{a_{11}}$<br>$A_{b_{11}} \quad A_{c_{11}}$ |

Uwaga: Wartości, zwroty i przesunięcia fazowe wskazów  $A_a$  przyjęto dowolnie.

czterofazowych normalnych i składowych grupowych dla ich wzajemnego porównania. Widać tu, jak i z równań (11) i (19), że

$$\left. \begin{array}{l} A_{00} = A_0 \\ \vdots \\ A_{01} = A_1 \end{array} \right\} \quad (24)$$

#### 4. OPORNOŚCI ZASTĘPCZE LINII TYPU CPZ W UKŁADZIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH

#### 4.1. Oporności zastępcze linii typu CPZ w warunkach pracy normalnej

Na wstępie rozpatrzymy pokróćce prace linii CPZ w warunkach normalnych. Podamy ogólne równania na straty napięcia w linii CPZ, zależności na oporności własne i wzajemne pętli ziemnopowrotnych oraz na oporności robocze linii CPZ. Kwestie te wiążą się bezpośrednio z tematem pracy.

Miedzy napięciami fazowymi (faz nieuziemionych w stosunku do ziemi) na początku linii typu CPZ ( $U_{a_1}$ ,  $U_{b_1}$  oraz  $U_{c_1}$  i  $U_{d_1}$ ) i na jej końcu ( $U_{a_2}$ ,  $U_{b_2}$  oraz  $U_{c_2}$  i  $U_{d_2}$ ) zachodzą następujące oczywiste związki:

$$\left. \begin{array}{l} U_{a_1} - U_{a_2} = \Delta U_a \\ U_{b_1} - U_{b_2} = \Delta U_b \\ U_{c_1} - U_{c_2} = \Delta U_c \\ U_{d_1} - U_{d_2} = \Delta U_d \end{array} \right\} \quad (25)$$

gdzie:  $\Delta U_a$  — strata napięcia w pętli „przewód a — ziemia” [pętla  $a_1 — a_2 — g_2 — g_1$ , rys. 2; w skrócie: pętla (ag)],

$\Delta U_b$  — strata napięcia w pętli „przewód b — ziemia“ (bg).

$\Delta U_c = \dots$  „przewód c — ziemia“ (cg).

$$4U_d = \text{„przewód } d = \text{ziemia“} (dq)$$

łóżmy, że linia typu CPZ nie ma przewodów odgromowych. Z

Założmy, że linia typu CPZ nie ma przewodów odgraniczonych. Z ogólnego równania (3) wynika, że ziemia jest drogą powrotną dla prądów przewodowych w linii typu CPZ. Oznacza to, że układ „cztery przewody – ziemia” można zastąpić czterema pętlami ziemnopowrotnymi, między którymi istnieją sprzężenia magnetyczne. Strata napięcia w każdej pętli „przewód-ziemia” będzie zależeć od prądu płynącego w tej pętli oraz od prądów płynących przez pozostałe pętle, które za pośrednictwem strumieni magnetycznych przez siebie wytworzonych indukują siły elektromotoryczne w pętli rozważanej. Możemy zatem napisać:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa_g}, Z_{ab_g}, Z_{ac_g}, Z_{ad_g} \\ Z_{ba_g}, Z_{bb_g}, Z_{bc_g}, Z_{bd_g} \\ Z_{ca_g}, Z_{cb_g}, Z_{cc_g}, Z_{cd_g} \\ Z_{da_g}, Z_{db_g}, Z_{dc_g}, Z_{dd_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Podane we wzorze (26) oporności oznaczają:

$Z_{aa_g}$ ,  $Z_{bb_g}$ ,  $Z_{cc_g}$ ,  $Z_{dd_g}$  — oporności własne odpowiednich pętli ziemnopowrotnych,

$Z_{ab_g}$ ,  $Z_{ac_g}$ ,  $Z_{ad_g}$  — oporności wzajemne uwzględniające wpływ prądów płynących w pętlach ziemnopowrotnych odpowiednio (bg), (cg) i (dg) na stratę napięcia w pętli (ag),

$Z_{ba_g}$ ,  $Z_{bc_g}$ ,  $Z_{bd_g}$  — oporności wzajemne uwzględniające wpływ prądów płynących w pętlach odpowiednio (ag), (cg) i (dg) na stratę napięcia w pętli (bg).

Podobnie można określić oporności wzajemne  $Z_{ca_g}$ ,  $Z_{cb_g}$  i  $Z_{cd_g}$  oraz  $Z_{da_g}$ ,  $Z_{db_g}$  i  $Z_{dc_g}$ .

Nie będziemy tu podawać sposobów obliczania oporności własnych i wzajemnych pętli ziemnopowrotnych. Jest to zagadnienie związane z teorią przepływu prądu zmiennego przez ziemię, znane w literaturze. Ograniczymy się tylko do podania końcowych wzorów na te oporności. Są to wzory przybliżone i dostosowane do wymagań praktyki.

Oporności własne pętli ziemnopowrotnych w postaci ogólnej oznaczać będziemy symbolem  $Z_s$ , a oporności wzajemne — symbolem  $Z_m$ .

Zarówno oporności własne jak i wzajemne zawierają składniki czynny i bierny. Oporności te w omach możemy wyrazić następującymi ogólnymi wzorami wartościowymi:

$$\left. \begin{array}{l} Z_s = R_s + jX_s = R_u + (R_o + R_{go} + jX_{s_{go}})l \\ Z_m = R_m + jX_m = R_u + (R_{go} + jX_{m_{go}})l \end{array} \right\} \quad (27)$$

We wzorach (27) oznaczają:

$R_u = R_{u_1} + R_{u_2}$  — oporność uziemień roboczych na początku ( $R_{u_1}$ ) i końcu ( $R_{u_2}$ ) linii CPZ w  $\Omega$ ,

$R_o$  — jednostkowa oporność czynna przewodu w  $\Omega/\text{km}$ ,

$R_{go}$  — jednostkowa oporność czynna wywołana przepływem prądu przez ziemię w  $\Omega/\text{km}$ ,

$X_{s_{go}}$  — jednostkowa oporność bierna własna pętli „przewód Ziemia“ w  $\Omega/\text{km}$ ,

$X_{m_{go}}$  — jednostkowa oporność bierna wzajemna między dwoma pętlami ziemnopowrotnymi w  $\Omega/\text{km}$ ,

$l$  — długość linii w km.

Według Carsona [3] i innych badaczy (Breisig, Buchholz, Haberland, Pollaczek, Rüdenberg)  $R_{go} = \pi^2 f = 0,0493 \approx 0,05 \Omega/\text{km}$  dla częstotliwości  $f = 50 \text{ Hz}$ .

Według Krakowskiego [6] średnio  $R_{go} = 0,06 \Omega/\text{km}$  dla  $f = 50 \text{ Hz}$ . Oporności bierne jednostkowe własne i wzajemne oblicza się dla częstotliwości  $f$  z następujących praktycznych wzorów liczbowych:

$$\left. \begin{aligned} X_{s_{go}} &= \frac{f}{50} 0,145 \lg \frac{D_g}{r_e} \\ X_{m_{go}} &= \frac{f}{50} 0,145 \lg \frac{D_g}{b} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

gdzie:  $r_e$  — zastępczy promień przewodu w cm; dla liniek stalo-aluminiowych  $r_e = 0,95 r$ , gdzie  $r$  — rzeczywisty promień przewodu w cm,

$b$  — odstęp między przewodami przynależnymi do dwóch rozpatrywanych pętli ziemnopowrotnych w cm,

$D_g$  — wielkość obliczeniowa w cm, wyrażająca się według Carsona i Krakowskiego (dla  $f=50$  Hz) wzorem

$$D_g \approx 930 \sqrt{\frac{f}{50} \varrho}, \quad (29)$$

przy czym  $\varrho$  — oporność właściwa gruntu w  $\Omega$  cm.

Dla  $f=50$  Hz Rüdenberg podaje:  $D_g = 800 \sqrt{\varrho}$ , według zaś Haberlanda  $D_g = 1070 \sqrt{\varrho}$ .

Zestawienie dokładniejszych wzorów na oporności własne i wzajemne pętli ziemnopowrotnych, wyprowadzonych przez różnych autorów do 1928 roku, zawarte jest w pracy Buchholza [2].

W literaturze światowej najczęściej stosowane są wzory Carsona, jako stosunkowo najdokładniejsze.

Jak wynika z podanych wyżej zależności, oporności własne i wzajemne pętli ziemnopowrotnych praktycznie rzecz biorąc nie zależą od wysokości zawieszenia przewodów nad ziemią.

Zakładając jednakowe przewody linii ( $r_a = r_b = r_c = r_d = r$ ) możemy więc napisać

$$Z_{aa_g} = Z_{bb_g} = Z_{cc_g} = Z_{dd_g} = Z_s, \quad (30)$$

przy czym

$$Z_s = R_u + \left( R_o + R_{go} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{r_e} \right) l, \quad (30a)$$

a także niezależnie od powyższego założenia można napisać wg zasady wzajemności

$$\left. \begin{aligned} Z_{ab_g} &= Z_{ba_g} \\ Z_{ac_g} &= Z_{ca_g} \\ Z_{ad_g} &= Z_{da_g} \\ Z_{bc_g} &= Z_{cb_g} \\ Z_{bd_g} &= Z_{db_g} \\ Z_{cd_g} &= Z_{dc_g} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

W dalszym toku pracy pominiemy indeksy  $g$  przy symbolach oporności własnych i wzajemnych pętli ziemnopowrotnych.

Oporność wzajemna pary pętli ziemnopowrotnych ( $ag$ ) i ( $bg$ )

$$Z_{ab} = R_u + \left( R_{go} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{ab}} \right) l, \quad (32)$$

gdzie  $b_{ab}$  jest odstęmem między przewodami faz  $a$  i  $b$ .

Podobnie wyrażają się oporności wzajemne pozostałych par pętli ziemnopowrotnych o odstępach międzyprzewodowych  $b_{ac}$ ,  $b_{ad}$ ,  $b_{bc}$ ,  $b_{bd}$  i  $b_{cd}$ .

Gdyby przewody linii CPZ były przeplecone na całej swej długości tak, aby każda para przewodów wzdłuż trasy linii znajdowała się w tych samych warunkach magnetycznych, to wszystkie podane we wzorach (26) oporności wzajemne byłyby sobie równe i wynosiły  $Z_m$ , tj.

$$Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd} = Z_m. \quad (33)$$

Jeżeli dodatkowo założymy, że układy prądów w obu częściach linii CPZ są symetryczne, tzn. jeżeli spełnione są zależności (4), to równania (26) przybiorą postać:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_a = (Z_s - Z_m) I_a = Z_{a_r} I_a = Z_r I_a \\ \Delta U_b = (Z_s - Z_m) I_b = Z_{b_r} I_b = Z_r I_b \\ \Delta U_c = (Z_s - Z_m) I_c = Z_{c_r} I_c = Z_r I_c \\ \Delta U_d = (Z_s - Z_m) I_d = Z_{d_r} I_d = Z_r I_d \end{array} \right| \quad (34)$$

Oporności  $Z_{a_r}$ ,  $Z_{b_r}$ ,  $Z_{c_r}$ ,  $Z_{d_r}$  nazywają się zastępczymi roboczymi opornościami fazowymi linii CPZ, a oporność  $Z_r$ , spełniająca równość

$$Z_r = Z_{a_r} = Z_{b_r} = Z_{c_r} = Z_{d_r} = Z_s - Z_m, \quad (35)$$

nosi nazwę zastępczej oporności roboczej linii CPZ lub krótko — oporności roboczej linii CPZ.

Spełnienie zależności (33) w przypadku gdy układ przewodów linii CPZ jest dowolny, jest ogólnie niemożliwe, bowiem:

a) nie ma takiego naturalnego układu przewodów, aby odstępy między wszystkimi przewodami były sobie równe, czyli aby były spełnione zależności odpowiadające równością (33), tj.

$$b_{ab} = b_{ac} = b_{ad} = b_{bc} = b_{bd} = b_{cd}, \quad (36)$$

b) nie można przepleść linii o ogólnym układzie przewodów tak, aby wzdłuż jej trasy wszystkie wymienione we wzorze (33) oporności wzajemne były sobie równe i wynosiły  $Z_m$ .

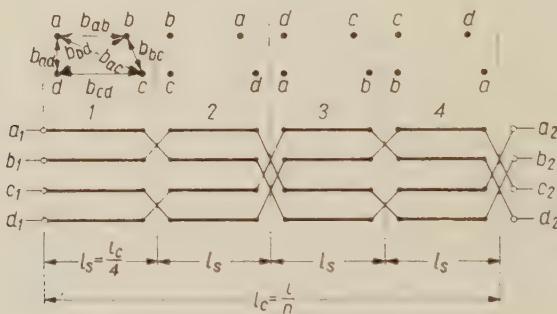
W linii CPZ istnieje 6 oporności wzajemnych ( $Z_{ab}$ ,  $Z_{ac}$ ,  $Z_{ad}$ ,  $Z_{bc}$ ,  $Z_{bd}$ ,  $Z_{cd}$ ) ogólnie o różnych wartościach. Można sądzić pozornie, że w cyklu

przeplecenia linii istnieje 6 sekcji o takim następstwie przewodów (faz) na każdej z nich, że w cyklu przeplecenia wszystkie wymienione oporności wzajemne są sobie równe. Z przeprowadzonych przez autora prób wynika, że nie można usytuować przewodów w cyklu przeplecenia linii CPZ w taki sposób, aby spełniona była równość (33). Jeżeli nawet dwie fazy, np.  $a$  i  $b$  wzdłuż jednego cyklu przeplecenia znajdą się między sobą na każdej sekcji w innych warunkach, wtedy jednak inne pary faz nie będą tego spełniać.

Jak się dalej okaże, w linii CPZ o pewnych symetrycznych układach przewodów, które mogą mieć zastosowanie w praktyce, możliwe jest takie przeplecenie (6 sekcji w cyklu), aby oporności wzajemne wszystkich par faz linii były sobie równe.

Założymy, że linia typu CPZ jest przepleciona w sposób podany na rys. 4, przy czym na rysunku tym pokazano tylko jeden pełny cykl przeplecenia odcinka linii o długości

$$l_c = 4l_s = \frac{l}{n}, \quad (37)$$



Rys. 4. Przeplecenie 4-sekcyjne linii typu CPZ o dowolnym układzie przewodów.

gdzie:  $l_s$  — długość sekcji przeplecenia,

$n$  — liczba cykli,

$l$  — całkowita długość linii.

Udowodnimy, że linia CPZ przepleciona zgodnie z rys. 4 jest praktycznie symetryczna w normalnych warunkach pracy, tj. udowodnimy prawdziwość wzorów (34) w przypadku takiego przeplecenia linii.

Symetryczną linią typu CPZ w normalnych warunkach pracy będziemy nazywać taką linię tego typu, w której oporności robocze poszczególnych nieuziemionionych faz linii (fazy:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ ) są sobie równe w przypadku, gdy w linii płyną prądy tworzące dwa przeciwnobne symetryczne układy, tj. układ:

$$I_a, I_b = a^2 I_a, I_c = a I_a \text{ w torze (linii DPZ) pierwszym}$$

i

$I_c, I_d = a^2 I_b, I_f = a I_c$  w torze (linii DPZ) drugim, przy czym

$$I_c = -I_a, I_d = -I_b, I_f = -I_e.$$

Przez symetryczną linię typu CPZ (niezależnie od układu prądów w jej torach) będziemy natomiast rozumieć taką linię CPZ, w której oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych linii są sobie równe i równe są sobie również oporności własne wszystkich pętli ziemnopowrotnych.

Przez symetrię linii CPZ w normalnych warunkach pracy będziemy tu więc rozumieć symetrię faz nieziemionych linii CPZ, a więc faz  $a, b, c$  i  $d$ . Oczywiście mimo spełnienia tej symetrii, linia CPZ jako element układu elektroenergetycznego trójfazowego jest w tym układzie nadal linią niesymetryczną.

Zakładamy z góry, że w normalnych warunkach pracy linii układy prądów w obu jej torach są praktycznie symetryczne.

Przez  $b_{ab}, b_{ac}, b_{ad}, b_{bc}, b_{bd}$  i  $b_{cd}$  oznaczymy tu odstępy między przewodami faz  $a, b, c$  i  $d$  linii na pierwszej sekcji przeplecenia. Oporności wzajemne między pętlami ziemnopowrotnymi będą zależne od tych odstępów, np. jednostkowa oporność wzajemna między pętlami  $(cg)$  i  $(dg)$  na trzeciej sekcji przeplecenia (rys. 4) wynosi  $Z_{ab_o}$ , ponieważ przewody  $c$  i  $d$  na tej sekcji umieszczone są na miejscu przewodów  $a$  i  $b$  na sekcji pierwszej.

Pominiemy początkowo oporności uziemień roboczych linii ( $R_u$ )

Strata napięcia w pętli  $(ag)$  linii CPZ przeplecionej zgodnie z rys. 4 wyrazi się więc równaniem:

$$\begin{aligned} \Delta U_a = n \Delta U_{a_c} = nl_s [ & Z_{s_o} I_a + Z_{ab_o} I_b + Z_{ac_o} I_c + Z_{ad_o} I_d + \\ & + Z_{s_o} I_a + Z_{ab_o} I_b + Z_{bd_o} I_c + Z_{bc_o} I_d + \\ & + Z_{s_o} I_a + Z_{cd_o} I_b + Z_{bd_o} I_c + Z_{ad_o} I_d + \\ & + Z_{s_o} I_a + Z_{cd_o} I_b + Z_{ac_o} I_c + Z_{bc_o} I_d ]. \end{aligned} \quad (38)$$

Mając na uwadze, że  $nl_s = \frac{l}{4}$  oraz że  $I_b = a^2 I_a, I_c = -I_a, I_d = -a^2 I_a$ , po wykonaniu rachunków otrzymamy

$$\Delta U_a = \left\{ Z_{s_o} - \frac{1}{2} \left[ Z_{ac_o} + Z_{bd_o} - a^2 (Z_{ab_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] \right\} l \cdot I_a. \quad (39)$$

Podobnie postępując obliczamy straty napięcia  $\Delta U_b, \Delta U_c$  i  $\Delta U_d$ ;

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_b &= \left\{ Z_{s_o} - \frac{1}{2} \left[ Z_{ac_o} + Z_{bd_o} - a (Z_{ab_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] \right\} l \cdot I_b \\ \Delta U_c &= \left\{ Z_{s_o} - \frac{1}{2} \left[ Z_{ac_o} + Z_{bd_o} - a^2 (Z_{ab_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] \right\} l \cdot I_c \\ \Delta U_d &= \left\{ Z_{s_o} - \frac{1}{2} \left[ Z_{ac_o} + Z_{bd_o} - a (Z_{ab_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] \right\} l \cdot I_d \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Identyczne zależności jak (39) i (40) otrzymuje się po uwzględnieniu oporności uziemień roboczych linii.

Równania (39) i (40) napiszemy w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_a &= (Z_s - Z_{m_a}) I_a = Z_{a_r} I_a \\ \Delta U_b &= (Z_s - Z_{m_b}) I_b = Z_{b_r} I_b \\ \Delta U_c &= (Z_s - Z_{m_c}) I_c = Z_{c_r} I_c \\ \Delta U_d &= (Z_s - Z_{m_d}) I_d = Z_{d_r} I_d \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} Z_{m_a} = Z_{m_c} &= \frac{1}{2} \left[ Z_{ac_o} + Z_{bd_o} - a^2 (Z_{ab_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] l \\ Z_{m_b} = Z_{m_d} &= \frac{1}{2} \left[ Z_{ac_o} + Z_{bd_o} - a (Z_{ab_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] l \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Podstawiając  $a = -\frac{1}{2} + j\sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $a^2 = -\frac{1}{2} - j\sqrt{\frac{3}{2}}$  oraz mając na uwadze wzory (27) (przy  $R_u = 0$ ) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} Z_{m_a} = Z_{m_c} &= (R_{go} - jR_o + jX_{m_{ro}})l \\ Z_{m_b} = Z_{m_d} &= (R_{go} + jR_o + jX_{m_{ro}})l \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \Delta R_o &= \frac{\sqrt{3}}{2} 0,145 \lg \frac{b_{ad} \cdot b_{cd}}{b_{ab} \cdot b_{bc}} \\ X_{m_{ro}} &= 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{sr}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Sredni odstęp międzyprzewodowy

$$b_{sr} = \sqrt{\frac{(b_{ac} \cdot b_{bd})^2}{b_{ad} \cdot b_{bc}}} \quad (45)$$

Poprawka  $\Delta R_o$  o wartości co najwyżej rzędu kilku setnych  $\Omega/\text{km}$  może być pominięta w obliczeniach praktycznych. Wobec tego

$$Z_{a_r} = Z_{b_r} = Z_{c_r} = Z_{d_r} = Z_r = Z_s - Z_{m_r}, \quad (46)$$

co jest dowodem, że linia typu CPZ, przepleciona zgodnie z rys. 4, jest praktycznie symetryczna w normalnych warunkach pracy (przy założeniu symetrii prądowej).

Po uwzględnieniu wzorów obliczeniowych

$$Z_r = Z_{rol} = \left( R_o + j 0,145 \lg \frac{b_{sr}}{r_e} \right) l. \quad (47)$$

Oporność  $Z_{m_r} = (R_{go} + j X_{m_{ro}})l$  nazwiemy wzajemną opornością roboczą linii CPZ.

Przy pominięciu poprawki  $\Delta R_o$  prawdziwa jest równość

$$Z_{m_r} = Z_{m_a} = Z_{m_b} = Z_{m_c} = Z_{m_d}, \quad (48)$$

niezależnie zaś od tego czy uwzględniamy lub pomijamy  $\Delta R_o$ , składowe bierne tych oporności wzajemnych spełniają równanie

$$X_{m_r} = X_{m_a} = X_{m_b} = X_{m_c} = X_{m_d}. \quad (49)$$

Równanie (48) uzasadnia nazwę „oporność wzajemna robocza“.

Oporność wzajemna robocza  $Z_{m_r} = Z_{m_a}$  jest to współczynnik proporcjonalności między stratą napięcia w pętli (ag) (w fazie a), wywołaną tylko przez prądy płynące w fazach b, c i d i prądem w fazie a — przy założeniu symetrii prądowej.

Istnieje więc różnica pojęciowa między opornością wzajemną dwóch pętli ziemnopowrotnych ( $Z_m$ ) i opornością wzajemną roboczą ( $Z_{m_r}$ ).

#### 4.2. Oporności linii typu CPZ dla składowych symetrycznych grupowych

##### 4.2.1. Zależności i określenia podstawowe

Wzory (26) podają ogólne zależności na fazowe straty napięcia w linii CPZ w funkcji prądów płynących w przewodach linii.

Wzory te napiszemy w następującej postaci macierzowej:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I}, \quad (50)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{aa}, Z_{ab}, Z_{ac}, Z_{ad} \\ Z_{ba}, Z_{bb}, Z_{bc}, Z_{bd} \\ Z_{ca}, Z_{cb}, Z_{cc}, Z_{cd} \\ Z_{da}, Z_{db}, Z_{dc}, Z_{dd} \end{bmatrix} \quad (50a)$$

oraz

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}, \quad (50b) \quad \Delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix}. \quad (50c)$$

Wyrażając straty napięcia w poszczególnych pętlach ziemnopowrotnych i prądy w fazach linii w funkcji ich składowych grupowych, w oparciu o zależności (20), możemy napisać

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{S}_2 \Delta \mathbf{U}_{gr} \\ \mathbf{I} = \mathbf{S}_2 \mathbf{I}_{gr} \end{array} \right\} \quad (51)$$

przy czym  $\Delta \mathbf{U}_{gr}$  jest macierzą składowych symetrycznych grupowych strat napięcia w pętlach ziemnopowrotnych linii CPZ, a  $\mathbf{I}_{gr}$  — macierzą składowych symetrycznych grupowych prądów fazowych w linii, czyli

$$\Delta \mathbf{U}_{gr} = \begin{bmatrix} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{bmatrix}, \quad (51a) \quad \mathbf{I}_{gr} = \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix}. \quad (51b)$$

Macierz

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

powstaje z macierzy  $\mathbf{S}_1$  [wzory (19) i (20)] przez przestawienie drugiego wiersza z pierwszym lub drugiej kolumny z pierwszą, przy czym

$$\mathbf{S}_2 = 4 \mathbf{S}_1^{-1}, \quad (53)$$

gdzie  $\mathbf{S}_1$  — macierz jak we wzorze (21).

Z równań (50) i (51) wynika:

$$\Delta \mathbf{U}_{gr} = \mathbf{S}_2 \mathbf{Z} \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{I}_{gr}. \quad (54)$$

Wyrażenie

$$\mathbf{Z}_{gr} = \mathbf{S}_2 \mathbf{Z} \mathbf{S}_2^{-1} \quad (55)$$

można nazwać macierzą oporności dla składowych symetrycznych grupowych (napięcia i prądu).

Mając na uwadze, że

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \frac{1}{4} \mathbf{S}_1 \quad (56)$$

<sup>3</sup> Wzór (55) słuszny przy zachowaniu kolejności mnożenia  $(\mathbf{S}_2 \times \mathbf{Z}) \times \mathbf{S}_2^{-1}$ .

otrzymamy:

$$\mathbf{Z}_{gr} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{aa}, Z_{ab}, Z_{ac}, Z_{ad} \\ Z_{ba}, Z_{bb}, Z_{bc}, Z_{bd} \\ Z_{ca}, Z_{cb}, Z_{cc}, Z_{cd} \\ Z_{da}, Z_{db}, Z_{dc}, Z_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Po wykonaniu rachunków i przy uwzględnieniu równań (30) i (31) otrzymamy

$$\mathbf{Z}_{gr} = \begin{bmatrix} Z_{01_{01}}, & Z_{01_{00}}, & Z_{01_{11}}, & Z_{01_{10}} \\ Z_{00_{01}}, & Z_{00_{00}}, & Z_{00_{11}}, & Z_{00_{10}} \\ Z_{11_{01}}, & Z_{11_{00}}, & Z_{11_{11}}, & Z_{11_{10}} \\ Z_{10_{01}}, & Z_{10_{00}}, & Z_{10_{11}}, & Z_{10_{10}} \end{bmatrix}, \quad (57a)$$

gdzie

$$Z_{01_{01}} = Z_s + \frac{1}{2} (Z_{ab} + Z_{cd} - Z_{ac} - Z_{ad} - Z_{bd} - Z_{cb})$$

$$Z_{00_{00}} = Z_s + \frac{1}{2} (Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{ad} + Z_{bc} + Z_{bd} + Z_{cd})$$

$$Z_{11_{11}} = Z_s + \frac{1}{2} (Z_{ad} + Z_{bc} - Z_{ab} - Z_{ac} - Z_{bd} - Z_{cd})$$

$$Z_{10_{10}} = Z_s + \frac{1}{2} (Z_{ac} + Z_{bd} - Z_{ab} - Z_{ad} - Z_{bc} - Z_{cd})$$

$$Z_{01_{00}} = Z_{00_{01}} = \frac{1}{2} (Z_{ab} - Z_{cd}) \quad (57b)$$

$$Z_{01_{11}} = Z_{11_{01}} = \frac{1}{2} (Z_{bd} - Z_{ac})$$

$$Z_{01_{10}} = Z_{10_{01}} = \frac{1}{2} (Z_{bc} - Z_{ad})$$

$$Z_{00_{11}} = Z_{11_{00}} = \frac{1}{2} (Z_{ad} - Z_{bc})$$

$$Z_{00_{10}} = Z_{10_{00}} = \frac{1}{2} (Z_{ac} - Z_{bd})$$

$$Z_{11_{10}} = Z_{10_{11}} = \frac{1}{2} (Z_{cd} - Z_{ab})$$

Równanie (54), wyrażające zależność między składowymi grupowymi strat napięcia i prądów, otrzyma więc postać:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{01_{01}}, Z_{01_{00}}, Z_{01_{11}}, Z_{01_{10}} \\ Z_{00_{01}}, Z_{00_{00}}, Z_{00_{11}}, Z_{00_{10}} \\ Z_{11_{01}}, Z_{11_{00}}, Z_{11_{11}}, Z_{11_{10}} \\ Z_{10_{01}}, Z_{10_{00}}, Z_{10_{11}}, Z_{10_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Oporność  $Z_{01_{01}}$  nazwano (przez analogię z odpowiednią nazwą oporności w teorii składowych symetrycznych trójfazowych) opornością dla składowej symetrycznej grupowej kolejności 01 napięcia i składowej symetrycznej grupowej kolejności 01 prądu lub w skrócie — opornością dla składowych grupowych napięcia i prądu kolejności 01.

Oporność  $Z_{01_{00}}$  nazwano opornością dla składowych symetrycznych grupowych kolejności 01 napięcia i kolejności 00 prądu.

Opierając się na podanych przykładowo określeniach można wprowadzić odpowiednie nazwy pozostałych oporności we wzorze (58).

Jak wynika z powyższych rozważań i związków, istnieje pewna analogia między równaniami dla składowych symetrycznych grupowych w odniesieniu do faz linii typu CPZ a równaniami dla składowych symetrycznych trójfazowych.

Zasady teorii składowych symetrycznych trójfazowych stosuje się powszechnie do obliczeń sieci elektroenergetycznych trójfazowych dzięki uproszczeniom obliczeniowym, jakie te zasady dają. Jednak uproszczenia te wynikają z założenia symetrycznych oporności własnych i wzajemnych każdego elementu sieci, w przeciwnym bowiem razie obliczenia metodą składowych symetrycznych są bardzo skomplikowane.

Podobnie przedstawia się zagadnienie w zakresie zastosowania teorii składowych grupowych do obliczeń linii i sieci typu CPZ. Gdyby oporności własne i wzajemne pętli ziemnopowrotnych w linii CPZ były niesymetryczne, celowość stosowania zasad teorii składowych symetrycznych grupowych do obliczeń linii i sieci tego typu byłaby problematyczna.

Jeżeli założymy, że linia typu CPZ jest symetryczna niezależnie od układu prądów w jej przewodach, to obliczanie sieci tą metodą znacznie się upraszcza i może znaleźć szerokie zastosowanie w praktyce.

Przy tym założeniu, tzn. przy spełnieniu zależności (30) i (33)

$$Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc} = Z_{dd} = Z_s$$

$$Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd} = Z_m$$

otrzymuje się

$$\left. \begin{array}{l} Z_{0100} = Z_{0111} = Z_{0110} = 0 \\ Z_{0001} = Z_{0011} = Z_{0010} = 0 \\ Z_{1001} = Z_{1000} = Z_{1011} = 0 \\ Z_{0101} = Z_{1111} = Z_{1010} = Z_s - Z_m = Z_r \\ Z_{0000} = Z_s + 3Z_m \end{array} \right\} \quad (59)$$

Wobec tego równania (58) uproszcza się do następujących:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} Z_s - Z_m, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\ 0, \quad Z_s + 3Z_m, \quad 0, \quad 0 \\ 0, \quad 0, \quad Z_s - Z_m, \quad 0 \\ 0, \quad 0, \quad 0, \quad Z_s - Z_m \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{array} \right\} \quad (60)$$

lub

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_{01} = (Z_s - Z_m) I_{01} \\ \Delta U_{00} = (Z_s + 3Z_m) I_{00} \\ \Delta U_{11} = (Z_s - Z_m) I_{11} \\ \Delta U_{10} = (Z_s - Z_m) I_{10} \end{array} \right\} \quad (60a)$$

Oznaczając:

$$\left. \begin{array}{l} Z_{0101} = Z_{0111} = Z_s - Z_m \\ Z_{0000} = Z_{0011} = Z_s + 3Z_m \\ Z_{1111} = Z_{1110} = Z_s - Z_m \\ Z_{1010} = Z_{1000} = Z_s - Z_m \end{array} \right\} \quad (61)$$

oraz mając na uwadze podane w pracy praktyczne wzory na  $Z_s$  (30 a) i  $Z_m$  (32) możemy napisać

$$\left. \begin{array}{l} Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_r = \left( R_o + j 0,145 \lg \frac{b_{sr}}{r_e} \right) l \\ Z_{00} = Z_s + 3Z_m = 4R_u + \left( R_o + 4R_{go} + j 0,145 \lg \frac{D_g^4}{r_e \cdot b_{sr}^3} \right) l \end{array} \right\} \quad (62)$$

Przekształcając wzór na  $Z_{00}$  otrzymuje się

$$Z_{00} = 4 \left[ R_u + \left( \frac{1}{4} R_o + R_{go} + j 0,145 \lg \frac{D_g^4}{r_e \cdot b_{sr}^3} \right) l \right]. \quad (63)$$

Średni odstęp międzyprzewodowy ( $b_{sr}$ ) we wzorach (62) i (63) wyraża się w tym przypadku zależnością:

$$b_{sr} = \sqrt[6]{b_{ab} \cdot b_{ac} \cdot b_{ad} \cdot b_{bc} \cdot b_{bd} \cdot b_{cd}}. \quad (64)$$

Równość wszystkich sześciu oporności wzajemnych ( $Z_{ab}$ ,  $Z_{ac}$ , ...,  $Z_{cd}$ ) w linii CPZ można uzyskać przez odpowiednie 6-sekcyjne przeplecenie linii CPZ o symetrycznych układach przewodów. W przypadku takiego przeplecenia każda para pętli ziemnopowrotnych linii wzduż jednego cyklu przeplecenia będzie w tych samych warunkach magnetycznych. W przypadku 4-sekcyjnego przeplecenia linii CPZ (rys. 4) oporności wzajemne sześciu par pętli ziemnopowrotnych ( $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$ ,  $bc$ ,  $bd$ , i  $cd$ ) nie są sobie równe. Aby w tym przypadku zachodziła równość oporności roboczych poszczególnych faz linii, układy prądów w obu torach linii muszą być symetryczne. Ten warunek jest zbędny dla linii o wyżej wymienionym przepleceniu 6-sekcyjnym.

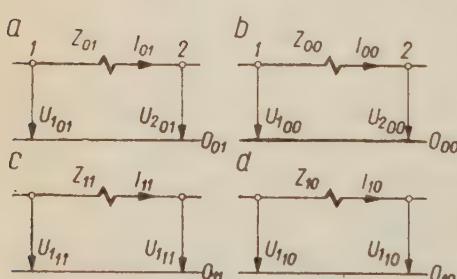
O obliczaniu  $b_{sr}$  w rozważanym wariancie linii CPZ, gdy spełniona jest równość wszystkich oporności wzajemnych pętli ziemnopowrotnych, będzie mowa dalej.

Z równań (60) wynikają bezpośrednio zastępcze schematy oporowe linii CPZ dla składowych grupowych napięć i prądów poszczególnych

kolejności w fazie podstawowej (w fazie a) układu składowych grupowych. Schematy te podano na rys. 5a÷5d.

Analogiczne schematy dla linii CPZ są prawdziwe dla składowych symetrycznych grupowych w pozostałych fazach układu składowych grupowych.

Ze wzorów (60) wynika twierdzenie: Jeżeli linia typu CPZ jest tak wykonana, że oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych są sobie równe i wynoszą  $Z_m$ , to składowe grupowe strat napięcia



Rys. 5. Zastępcze schematy oporowe linii typu CPZ w układzie składowych symetrycznych grupowych — a. kolejności 01, b. kolejności 00, c. kolejności 11, d. kolejności 10.

każdej kolejności zależą od składowych grupowych prądów tylko tej samej kolejności. Spełniona jest przy tym równość oporności zastępczych linii CPZ dla składowych symetrycznych grupowych kolejności 01, 11 i 10, czyli

$$Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_r. \quad (65)$$

Oporności  $Z_{01}$ ,  $Z_{11}$ ,  $Z_{10}$  są w tym przypadku równe oporności roboczej linii CPZ.

Oporności  $Z_r$ ,  $Z_{01}$ ,  $Z_{11}$ ,  $Z_{10}$  nie zależą od parametrów ziemi i od oporności uziemień roboczych linii CPZ, a  $Z_{00}$  zależy od tych wielkości. Jest to zrozumiałe, bowiem ani prąd roboczy (w warunkach normalnych, gdy układy prądów w obu częściach linii CPZ są symetryczne), ani sumy składowych grupowych prądów kolejności 01, 11, i 10 nie płyną przez ziemię. Natomiast dla prądów składowej grupowej kolejności 00 ziemia stanowi drogę powrotną. Prąd powrotny płynący przez ziemię  $I_g = I_{a_{00}} + I_{b_{00}} + I_{c_{00}} + I_{d_{00}} = 4I_{a_{00}}$ , a więc prąd ten wywołuje na oporności  $R_u$  i oporności  $R_{go}$  stratę napięcia  $4 \times I_{a_{00}}(R_u + R_{go})$ ; stąd obecność składników  $4R_u$  i  $4R_{go}$  we wzorach (62).

#### 4.2.2. Oporności linii typu CPZ przeplecionej 4-sekcyjnie dla składowych symetrycznych grupowych

Powstaje pytanie, czy słuszne są równania (60) dla linii CPZ przeplecionej zgodnie z rys. 4 w celu uzyskania symetrii linii w warunkach normalnej pracy.

Oczywiście linia CPZ zbudowana tak, że oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych są sobie równe, jest także tym bardziej symetryczna w warunkach normalnych. Jak udowodniliśmy, wystarczy jednak wykonać proste i tanie przepłecenie jak na rys. 4, aby linia CPZ była praktycznie symetryczna w normalnych warunkach pracy. Jak się później okaże, aby spełnione były wzory (60) w podanej postaci i wzory (62) należy wykonać w każdym cyklu 6 sekcji przepłeczeń, przy czym tego rodzaju przepłecenie możliwe jest tylko w liniach CPZ o szczególnych układach przewodów, o czym już wspomniano.

Zbadamy więc cechy linii CPZ, przeplecionej zgodnie z rys. 4 w układzie składowych grupowych.

Wprowadzimy następujące oznaczenia i skrócone nazwy:

$Z_{m_{01}}$  — oporność wzajemna dla składowych grupowych kolejności 01, czyli jest to składnik zastępczej oporności linii CPZ dla składowych grupowych (napięcia i prądu) kolejności 01 wyrażającej się wzorem

$$Z_{01} = \frac{U_{01}}{I_{01}} = Z_s - Z_{m_{01}}; \quad (66a)$$

$Z_{m_{00}}$  — oporność wzajemna dla składowych grupowych kolejności 00, jako składnik zastępczej oporności linii CPZ dla składowych grupowych kolejności 00, równej

$$Z_{00} = \frac{U_{00}}{I_{00}} = Z_s + 3Z_{m_{00}}; \quad (66b)$$

$Z_{m_{11}}$  — oporność wzajemna dla składowych grupowych kolejności 11, jako składnik zastępczej oporności linii CPZ dla składowych grupowych kolejności 11, przy czym

$$Z_{11} = \frac{U_{11}}{I_{11}} = Z_s - Z_{m_{11}}; \quad (66c)$$

$Z_{m_{10}}$  — oporność wzajemna dla składowych grupowych kolejności 10, jako składnik zastępczej oporności linii CPZ dla składowych grupowych kolejności 10, przy czym

$$Z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = Z_s - Z_{m_{10}}. \quad (66d)$$

Określmy bliżej wymienione oporności wzajemne.

Oporność wzajemna  $Z_{m_{01}}$  jest to więc współczynnik proporcjonalności między składową grupową strat napięcia kolejności 01 w pętli (ag) (w fazie a, podstawowej), wywołaną tylko przez składowe grupowe prądów kolejności 01 w fazach b, c i d linii CPZ i składową grupową prądów kolejności 01, płynącą w fazie a.

Potrójna wartość oporności wzajemnej  $Z_{m_{00}}$  ( $3Z_{m_{00}}$ ) jest to współczynnik proporcjonalności między składową grupową strat napięcia kolejności 00 w fazie a, wywołaną tylko przez składowe grupowe prądów kolejności 00, płynące w fazach b, c i d linii CPZ i składową grupową prądów kolejności 00, płynącą w fazie a.

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Jeżeli linia typu CPZ jest przepleciona zgodnie z rys. 4 tak, że jej zastępcze robocze oporności fazowe w fazach nieuziemionych są sobie równe przy założeniu, że układy prądów w obu częściach linii CPZ są symetryczne, to zachodzą następujące nierówności:

$$\left. \begin{array}{l} Z_{m_{11}} \neq Z_{m_{01}} \neq Z_{m_{10}} \neq Z_{m_{11}} \neq Z_{m_{00}} \\ Z_{m_{01}} \neq Z_{m_{00}} \neq Z_{m_{10}} \end{array} \right\} \quad (67)$$

czyli zastępcze oporności linii CPZ dla składowych kolejności 01, 11 i 10 nie są nawzajem sobie równe i nie równają się oporności zastępczej dla składowej grupowej kolejności 00.

Dla prostoty dowodu pominiemy początkowo oporności uziemień roboczych w linii CPZ.

Opierając się na równaniach (38) i podobnych, tu nie podanych równaniach na straty napięcia  $\Delta U_b$ ,  $\Delta U_c$  i  $\Delta U_d$  oraz mając na uwadze przeplenie linii zgodnie z rys. 4, możemy napisać wyrażenia na straty napięcia w poszczególnych pętlach ziemnopowrotnych linii CPZ.

W pętli (ag)

$$\Delta U_a = \frac{1}{4} (\Delta U_{a1_0} + \Delta U_{a2_0} + \Delta U_{a3_0} + \Delta U_{a4_0}) l = \frac{1}{4} l \sum_1^4 \Delta U_{a\alpha_0}, \quad (68)$$

gdzie  $\Delta U_{a1_0}$  — jednostkowa strata napięcia na pierwszej sekcji prze-

plecenia w pętli (ag),  $\Delta U_{a2_o}$  — na drugiej itd. w jednym cyklu przeplecenia.

Jednostkowe straty napięcia w pętli (ag) na poszczególnych sekcjach przeplecenia są równe:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{a1_o} &= Z_{s_o} I_a + Z_{ab_o} I_b + Z_{ac_o} I_c + Z_{ad_o} I_d \\ \Delta U_{a2_o} &= Z_{s_o} I_a + Z_{ab_o} I_b + Z_{bd_o} I_c + Z_{bc_o} I_d \\ \Delta U_{a3_o} &= Z_{s_o} I_a + Z_{cd_o} I_b + Z_{bd_o} I_c + Z_{ad_o} I_d \\ \Delta U_{a4_o} &= Z_{s_o} I_a + Z_{cd_o} I_b + Z_{ac_o} I_c + Z_{bc_o} I_d \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

albo pisząc w postaci macierzowej —

$$\Delta \mathbf{U}_{ao} = \begin{bmatrix} \Delta U_{a1_o} \\ \Delta U_{a2_o} \\ \Delta U_{a3_o} \\ \Delta U_{a4_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s_o}, Z_{ab_o}, Z_{ac_o}, Z_{ad_o} \\ Z_{s_o}, Z_{ab_o}, Z_{bd_o}, Z_{bc_o} \\ Z_{s_o}, Z_{cd_o}, Z_{bd_o}, Z_{ad_o} \\ Z_{s_o}, Z_{cd_o}, Z_{ac_o}, Z_{bc_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} \quad (69a)$$

lub

$$\Delta \mathbf{U}_{ao} = \mathbf{Z}_o \mathbf{I}_a. \quad (69b)$$

Podobnie w pozostałych pętlach ziemnopowrotnych

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_b &= \frac{1}{4} l \sum_1^4 \Delta U_{b\alpha_o} \\ \Delta U_c &= \frac{1}{4} l \sum_1^4 \Delta U_{c\alpha_o} \\ \Delta U_d &= \frac{1}{4} l \sum_1^4 \Delta U_{d\alpha_o} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

i

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{bo} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{I}_b \\ \Delta \mathbf{U}_{co} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{I}_c \\ \Delta \mathbf{U}_{do} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{I}_d \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

gdzie

$$\Delta \mathbf{U}_{bo} = \begin{bmatrix} \Delta U_{b1_o} \\ \Delta U_{b2_o} \\ \Delta U_{b3_o} \\ \Delta U_{b4_o} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{U}_{co} = \begin{bmatrix} \Delta U_{c1_o} \\ \Delta U_{c2_o} \\ \Delta U_{c3_o} \\ \Delta U_{c4_o} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{U}_{do} = \begin{bmatrix} \Delta U_{d1_o} \\ \Delta U_{d2_o} \\ \Delta U_{d3_o} \\ \Delta U_{d4_o} \end{bmatrix}, \quad (71a)$$

$$\mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} I_b \\ I_a \\ I_d \\ I_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_c = \begin{bmatrix} I_c \\ I_d \\ I_a \\ I_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_d = \begin{bmatrix} I_d \\ I_c \\ I_b \\ I_a \end{bmatrix}, \quad (71b)$$

$$\mathbf{Z}_o = \begin{bmatrix} Z_{s_o}, Z_{ab_o}, Z_{ac_o}, Z_{ad_o} \\ Z_{s_o}, Z_{ab_o}, Z_{bd_o}, Z_{bc_o} \\ Z_{s_o}, Z_{cd_o}, Z_{bd_o}, Z_{ad_o} \\ Z_{s_o}, Z_{cd_o}, Z_{ac_o}, Z_{bc_o} \end{bmatrix}, \quad (72)$$

przy czym oporności jednostkowe — własna ( $Z_{s_o}$ ) i wzajemne ( $Z_{ab_o}$ ,  $Z_{ac_o}$ ,  $Z_{ad_o}$ ,  $Z_{bc_o}$ ,  $Z_{bd_o}$  i  $Z_{cd_o}$ ) zostały już określone.

Rozkładając prądy fazowe na składowe symetryczne grupowe otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{I}_a = \mathbf{S}_a \mathbf{I}_{gr} \\ \mathbf{I}_b = \mathbf{S}_b \mathbf{I}_{gr} \\ \mathbf{I}_c = \mathbf{S}_c \mathbf{I}_{gr} \\ \mathbf{I}_d = \mathbf{S}_d \mathbf{I}_{gr} \end{array} \right\} \quad (73)$$

We wzorach (73) oznaczono przez:

$\mathbf{I}_{gr}$  — macierz składowych symetrycznych grupowych prądów [wzór (51b)] — która wyraża się jako

$$\mathbf{I}_{gr} = \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix}$$

ponadto

$$\mathbf{S}_a = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \quad (74a)$$

$$\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \end{bmatrix} \quad (74b)$$

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{bmatrix} \quad (74c)$$

$$\mathbf{S}_d = \begin{bmatrix} -1, & 1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \quad (74d)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{ao} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{S}_a \mathbf{I}_{gr} \\ \Delta \mathbf{U}_{bo} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{S}_b \mathbf{I}_{gr} \\ \Delta \mathbf{U}_{co} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{S}_c \mathbf{I}_{gr} \\ \Delta \mathbf{U}_{do} &= \mathbf{Z}_o \mathbf{S}_d \mathbf{I}_{gr} \end{aligned} \quad (75)$$

Składowe symetryczne grupowe strat napięcia w linii CPZ spełniają równanie

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \quad (76)$$

Obliczmy  $\Delta U_{01}$ . Z równania (76) wynika

$$\Delta U_{01} = \frac{1}{4} (\Delta U_a + \Delta U_b - \Delta U_c - \Delta U_d) = \frac{1}{16} l (\Delta U_{01_1} + \Delta U_{01_2} - \Delta U_{01_3} - \Delta U_{01_4}),$$

przy czym

$$\Delta U_{01_1} = \Delta U_{ao_1} + \Delta U_{bo_1} - \Delta U_{co_1} - \Delta U_{do_1}$$

$$\Delta U_{01_2} = \Delta U_{ao_2} + \Delta U_{bo_2} - \Delta U_{co_2} - \Delta U_{do_2}$$

$$\Delta U_{01_3} = \Delta U_{ao_3} + \Delta U_{bo_3} - \Delta U_{co_3} - \Delta U_{do_3}$$

$$\Delta U_{01_4} = \Delta U_{ao_4} + \Delta U_{bo_4} - \Delta U_{co_4} - \Delta U_{do_4},$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{01} &= \begin{bmatrix} \Delta U_{01_1} \\ \Delta U_{01_2} \\ \Delta U_{01_3} \\ \Delta U_{01_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_{ao_1} \\ \Delta U_{ao_2} \\ \Delta U_{ao_3} \\ \Delta U_{ao_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta U_{bo_1} \\ \Delta U_{bo_2} \\ \Delta U_{bo_3} \\ \Delta U_{bo_4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta U_{co_1} \\ \Delta U_{co_2} \\ \Delta U_{co_3} \\ \Delta U_{co_4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta U_{do_1} \\ \Delta U_{do_2} \\ \Delta U_{do_3} \\ \Delta U_{do_4} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{Z}_o (\mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b - \mathbf{S}_c - \mathbf{S}_d) \mathbf{I}_{gr} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \hline & Z_{s_0}, & Z_{ab_0}, & Z_{ac_0}, & Z_{ad_0} & \\ \hline & Z_{s_0}, & Z_{ab_0}, & Z_{bd_0}, & Z_{bc_0} & \\ \hline & Z_{s_0}, & Z_{cd_0}, & Z_{bd_0}, & Z_{ad_0} & \\ \hline & Z_{s_0}, & Z_{cd_0}, & Z_{ac_0}, & Z_{bc_0} & \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & 1, & 1, & 1, & 1 \\ \hline & 1, & 1, & -1, & -1 \\ \hline & -1, & 1, & -1, & 1 \\ \hline & -1, & 1, & 1, & -1 \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hline & I_{01} \\ \hline & I_{00} \\ \hline & I_{11} \\ \hline & I_{10} \\ \hline \end{array} \right] + \\
 &+ \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \hline & & & & & \\ \hline & Z_o & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & 1, & 1, & -1, & -1 \\ \hline & 1, & 1, & 1, & 1 \\ \hline & -1, & 1, & 1, & -1 \\ \hline & -1, & 1, & -1, & 1 \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hline & I_{01} \\ \hline & I_{00} \\ \hline & I_{11} \\ \hline & I_{10} \\ \hline \end{array} \right] - \\
 &- \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \hline & & & & & \\ \hline & Z_o & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & -1, & 1, & -1, & 1 \\ \hline & -1, & 1, & 1, & -1 \\ \hline & 1, & 1, & 1, & 1 \\ \hline & 1, & 1, & -1, & -1 \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hline & I_{01} \\ \hline & I_{00} \\ \hline & I_{11} \\ \hline & I_{10} \\ \hline \end{array} \right] - \\
 &- \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \hline & & & & & \\ \hline & Z_o & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & -1, & 1, & 1, & -1 \\ \hline & -1, & 1, & -1, & 1 \\ \hline & 1, & 1, & -1, & -1 \\ \hline & 1, & 1, & 1, & 1 \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hline & I_{01} \\ \hline & I_{00} \\ \hline & I_{11} \\ \hline & I_{10} \\ \hline \end{array} \right] \} \quad (77)
 \end{aligned}$$

Jak widać ze wzoru (77), strata napięcia każdej kolejności zależy ogólnie od składowych prądów wszystkich kolejności.

Równanie (77) możemy napisać w postaci (wzór 58) następującej:

$$\Delta U_{01} = Z_{01_{01}} I_{01} + Z_{01_{00}} I_{00} + Z_{01_{11}} I_{11} + Z_{01_{10}} I_{10}. \quad (77a)$$

Po wykonaniu prostych rachunków otrzymuje się

$$\left. \begin{array}{l} Z_{01_{01}} = Z_{01} \cdot \left[ Z_{s_0} - \frac{1}{2} (Z_{ac_0} + Z_{ad_0} - Z_{bc_0} - Z_{bd_0} - Z_{ab_0} - Z_{cd_0}) \right] l \\ Z_{01_{00}} = 0 \\ Z_{01_{11}} = 0 \\ Z_{01_{10}} = 0 \end{array} \right\} \quad (78)$$

Analogicznie obliczymy składowe grupowe strat napięcia pozostałych kolejności.

Postępując jak w przypadku obliczania  $\Delta \mathbf{U}_{01}$  będziemy mieli

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U}_{00} = \mathbf{Z}_0 (\mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_c + \mathbf{S}_d) \mathbf{I}_{gr} \\ \Delta \mathbf{U}_{11} = \mathbf{Z}_0 (\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b - \mathbf{S}_c + \mathbf{S}_d) \mathbf{I}_{gr} \\ \Delta \mathbf{U}_{10} = \mathbf{Z}_0 (\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_c - \mathbf{S}_d) \mathbf{I}_{gr} \end{array} \right\} \quad (79)$$

Podobnie jak (77a), równania ogólne wiążące składowe grupowe strat napięcia kolejności 00, 11 i 10 ze składowymi symetrycznymi grupowymi prądów  $I_{01}$ ,  $I_{00}$ ,  $I_{11}$  i  $I_{10}$  są następujące

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_{00} = Z_{0001} I_{01} + Z_{0000} I_{00} + Z_{0011} I_{11} + Z_{0010} I_{10} \\ \Delta U_{11} = Z_{1101} I_{01} + Z_{1100} I_{00} + Z_{1111} I_{11} + Z_{1110} I_{10} \\ \Delta U_{10} = Z_{1001} I_{01} + Z_{1000} I_{00} + Z_{1011} I_{11} + Z_{1010} I_{10} \end{array} \right\} \quad (80)$$

Po rozwinięciu zależności (79) na składowe grupowe strat napięcia kolejności 00, 11 i 10 i po wykonaniu elementarnych rachunków dochodzimy do wyrażeń:

$$\left. \begin{array}{l} Z_{0001} = 0 \\ Z_{0000} = Z_{00} \left[ Z_{s_o} + \frac{1}{2} (Z_{ab_o} + Z_{ac_o} + Z_{ad_o} + Z_{bc_o} + Z_{bd_o} + Z_{cd_o}) \right] l \\ Z_{0011} = 0 \end{array} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{0010} = 0 \\ Z_{1101} = 0 \\ Z_{1100} = 0 \\ Z_{1111} = Z_{11} = \left[ Z_{s_o} - \frac{1}{2} (Z_{ab_o} + Z_{ac_o} + Z_{bd_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) \right] l \\ Z_{1110} = 0 \end{array} \right\} \quad (82)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{1000} = 0 \\ Z_{1011} = 0 \\ Z_{1010} = Z_{10} = \left[ Z_{s_o} - \frac{1}{2} (Z_{ab_o} + Z_{ad_o} + Z_{bc_o} + Z_{cd_o} - Z_{ac_o} - Z_{bd_o}) \right] l \end{array} \right\} \quad (83)$$

Zatem

$$\left. \begin{array}{l} Z_{m_{01}} = \frac{1}{2} (Z_{ac_o} + Z_{ad_o} + Z_{bc_o} + Z_{bd_o} - Z_{ab_o} - Z_{cd_o}) l \\ Z_{m_{00}} = \frac{1}{2} (Z_{ab_o} + Z_{ac_o} + Z_{ad_o} + Z_{bc_o} + Z_{bd_o} + Z_{cd_o}) l \\ Z_{m_{11}} = \frac{1}{2} (Z_{ab_o} + Z_{ac_o} + Z_{bd_o} + Z_{cd_o} - Z_{ad_o} - Z_{bc_o}) l \\ Z_{m_{10}} = \frac{1}{2} (Z_{ab_o} + Z_{ad_o} + Z_{bc_o} + Z_{cd_o} - Z_{ac_o} - Z_{bd_o}) l \end{array} \right\} \quad (84)$$

Z tego wynika słuszność zależności (67), tzn.  $Z_{m_{11}} \neq Z_{m_{01}} \neq Z_{m_{11}} \neq Z_{m_{10}}$  i  $Z_{m_{01}} \neq Z_{m_{00}} \neq Z_{m_{10}}$ , co było do udowodnienia.

Ponieważ ogólnie wzajemna oporność jednostkowa wyraża się zależnością

$$Z_{m_0} = R_{go} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{sr}},$$

zatem dla  $Z_{m_{01}}$ ,  $Z_{m_{00}}$ ,  $Z_{m_{11}}$  i  $Z_{m_{10}}$  otrzymamy

$$b_{sr_{01}} = \sqrt{\frac{b_{ac} \cdot b_{ad} \cdot b_{bc} \cdot b_{bd}}{b_{ab} \cdot b_{cd}}}, \quad (85)$$

$$b_{sr_{00}} = \sqrt[6]{b_{ab} \cdot b_{ac} \cdot b_{ad} \cdot b_{bc} \cdot b_{bd} \cdot b_{cd}}, \quad (86)$$

$$b_{sr_{11}} = \sqrt{\frac{b_{ab} \cdot b_{ac} \cdot b_{bd} \cdot b_{cd}}{b_{ad} \cdot b_{bc}}}, \quad (87)$$

$$b_{sr_{10}} = \sqrt{\frac{b_{ab} \cdot b_{ad} \cdot b_{bc} \cdot b_{cd}}{b_{ac} \cdot b_{bd}}}. \quad (88)$$

Z podanych zależności (78) i (81)  $\div$  (83) wynika, że w rozpatrywanej linii CPZ, przeplecionej zgodnie z rys. 4, każda składowa grupowa strat napięcia zależy od składowej grupowej prądów tylko tej samej kolejności. Wobec tego postać równań (60) nie ulega zmianie; zmieniają się jedynie oporności zastępcze dla składowych grupowych każdej kolejności. Zatem

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{01} &= (Z_s - Z_{m_{01}}) I_{01} = Z_{01} I_{01} \\ \Delta U_{00} &= (Z_s + 3Z_{m_{00}}) I_{00} = Z_{00} I_{00} \\ \Delta U_{11} &= (Z_s - Z_{m_{11}}) I_{11} = Z_{11} I_{11} \\ \Delta U_{10} &= (Z_s - Z_{m_{10}}) I_{10} = Z_{10} I_{10} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Udowodnienie nierówności (67) w linii CPZ przeplecionej zgodnie z rys. 4 pociąga w konsekwencji dowód, że oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych w tak zbudowanej linii CPZ nie są nawzajem sobie równe, tzn. w linii takiej zależności (33) nie są spełnione.

W tablicy 2 zestawiono wzory obliczeniowe na średnie odstępy międzyprzewodowe dla oporności wzajemnych składowych grupowych poszczególnych kolejności ( $b_{sr_{01}}$ ,  $b_{sr_{00}}$ ,  $b_{sr_{11}}$ ,  $b_{sr_{10}}$ ) dla niektórych, możliwych w praktyce układów przewodów linii CPZ, przeplecionej 4-sekcyjnie. W tablicy tej w rubryce 7 podano również wzory na średni odstęp międzyprzewodowy ( $b_{sr_r}$ ) linii CPZ, obliczony z zależności (45), jako składnik wzoru na zastępczą oporność roboczą linii CPZ. Należy zaznaczyć, że linia

CPZ o kwadratowym układzie przewodów może być również bez przeplecenia linią symetryczną w normalnych warunkach pracy [10].

Z zestawienia w tab. 2 wynikają następujące wnioski:

1. Sposób rozmieszczenia przewodów poszczególnych faz, czyli następstwo faz na pierwszej sekcji przepłecenia linii, niezależnie od układu prze-

T a b l i c a 2

Wartości średnich odstępów międzyprzewodowych  $b_{sr}$   
dla niektórych układów przewodów linii typu CPZ.

| Układ przewodów | Rozmieszczenie przewodów na pierwszej sekcji | Średnie odstępy międzyprzewodowe |                          |                        |                        |                               |
|-----------------|--|----------------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------------|
|                 |  | $b_{sr01}$                       | $b_{sr00}$               | $b_{sr11}$             | $b_{sr10}$             | $b_{sr_r}$                    |
| Kwadratowy      | 1 2<br>(a)                                   | 3                                | 4                        | 5                      | 6                      | 7                             |
|                 | (a)  | $\sqrt{2} b$                     | $\frac{6}{\sqrt{2}} b$   | $\frac{1}{\sqrt{2}} b$ | $\sqrt{2} b$           | $\frac{1}{\sqrt{2}} b$        |
|                 | (b)  | $1,415 b$                        | $0,31 b$                 | $0,705 b$              | $1,415 b$              | $0,84 b$                      |
|                 | (a)  | $\sqrt{2} b$                     | $\frac{6}{\sqrt{2}} b$   | $\sqrt{2} b$           | $\frac{1}{\sqrt{2}} b$ | $\sqrt{2} b$                  |
| Prostokątny     | (c)  | $1,415 b$                        | $0,31 b$                 | $1,415 b$              | $0,705 b$              | $1,415 b$                     |
|                 |  | $-\frac{\sqrt{5}}{2} b$          | $\frac{6\sqrt{20}}{5} b$ | $\frac{2}{\sqrt{5}} b$ | $2\sqrt{5} b$          | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} b$ |
|                 | c •   d                                      | $1,12 b$                         | $1,65 b$                 | $0,805 b$              | $4,47 b$               | $0,945 b$                     |
|                 |  | $2\sqrt{5} b$                    | $\frac{6\sqrt{20}}{5} b$ | $\frac{2}{\sqrt{5}} b$ | $\frac{\sqrt{5}}{2} b$ | $\frac{2}{\sqrt{5}} b$        |
| Płaski          | b •   d                                      | $4,47 b$                         | $1,65 b$                 | $0,805 b$              | $1,12 b$               | $1,335 b$                     |
|                 |  | $2\sqrt{3} b$                    | $\frac{6\sqrt{12}}{2} b$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} b$ | $\frac{2}{\sqrt{3}} b$ | $\sqrt{\frac{3}{2}} b$        |
|                 | (b) (a) (c) (d)                              | $3,47 b$                         | $1,51 b$                 | $0,865 b$              | $1,16 b$               | $1,225 b$                     |
|                 |  | $2\sqrt{3} b$                    | $\frac{6\sqrt{12}}{2} b$ | $\frac{2}{\sqrt{3}} b$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} b$ | $\frac{2}{\sqrt{3}} b$        |
|                 | (b) (a) (d) (c)                              | $3,47 b$                         | $1,51 b$                 | $1,16 b$               | $0,865 b$              | $1,52 b$                      |

wodów (kwadratowy, płaski czy prostokątny), wpływa na wartości zastępczych oporności linii CPZ-roboczej i dla składowych symetrycznych grupowych kolejności 01, 11 i 10.

2. Na ogół zastępcze oporności linii CPZ dla składowych symetrycznych grupowych nie są równe oporności roboczej linii, jedynie dla kwadratowego układu przewodów o następstwie faz (a, b, c, d lub a, c, b, d; tablica 2, lp. 2) spełnione są równości:

$$Z_{01} = Z_{11} = Z_r.$$

#### 4.2.3. Charakterystyczne właściwości symetrycznej linii typu CPZ dla składowych grupowych. Przepłecenie linii 6-sekcyjne

Dla linii CPZ przepłecionej zgodnie z rys. 4 i dla linii w której  $Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd}$  słusne są następujące zależności:

$$\left. \begin{array}{l} Z_{a_{01}} = Z_{b_{01}} = Z_{c_{01}} = Z_{d_{01}} = Z_{01} \\ Z_{a_{00}} = Z_{b_{00}} = Z_{c_{00}} = Z_{d_{00}} = Z_{00} \\ Z_{a_{11}} = Z_{b_{11}} = Z_{c_{11}} = Z_{d_{11}} = Z_{11} \\ Z_{a_{10}} = Z_{b_{10}} = Z_{c_{10}} = Z_{d_{10}} = Z_{10} \end{array} \right\} \quad (90)$$

Wyrażenia (90) pokazują, że zastępcze oporności linii CPZ dla składowych grupowych danej kolejności są takie same w każdej fazie linii.

Udowodnimy prawdziwość dowolnej równości w równaniach (90), np.

$$Z_{d_{10}} = Z_{a_{10}}.$$

Oporność zastępcza  $Z_{d_{10}}$  we wzorach (90) określona jest w równaniu

$$Z_{d_{10}} = \frac{\Delta U_{d_{10}}}{I_{d_{10}}} = Z_s - Z_{m d_{10}}, \quad (91)$$

przy czym tu  $Z_{m d_{10}}$  — oporność wzajemna linii CPZ dla składowej grupowej kolejności 10 w fazie  $d$ .

Podobnie jak  $Z_{d_{10}}$  wyrażają się inne, wymienione we wzorach (90) oporności zastępcze.

Zgodnie z ogólnymi równaniami dla składowych grupowych (23), spełnionymi niezależnie od konstrukcji linii —

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_{d_{10}} = -\Delta U_{a_{10}} \\ I_{d_{10}} = I_{a_{10}} \end{array} \right\} \quad (92)$$

Wstawiając zależności (92) do wzoru (91) i mając na uwadze, że

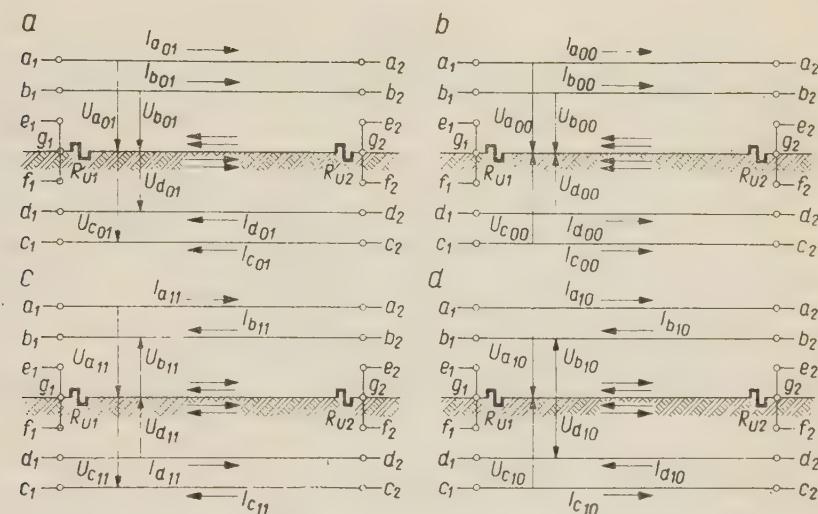
$$Z_{a_{10}} = \frac{\Delta U_{a_{10}}}{I_{a_{10}}} = Z_s - Z_{m a_{10}},$$

widzimy, że  $Z_{d_{10}} = Z_{a_{10}}$  oraz  $Z_{m d} = Z_{m a}$ .

Podobnie można dowieść słuszności pozostałych równości we wzorach (90).

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że symetryczną linię typu CPZ (przepłecioną zgodnie z rys. 4 lub w przypadku, gdy oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych są sobie równe), w fazach której płyną dowolne prądy  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  i  $I_d$ , wywołujące straty napięcia  $\Delta U_a$ ,  $\Delta U_b$ ,  $\Delta U_c$  i  $\Delta U_d$  w pętlach ziemnopowrotnych linii, można zastąpić ogólnie czterema liniami zastępczymi zbudowanymi tak samo jak linia rzeczywista, przy czym w każdej z tych linii płyną prądy równe składowym grupowym prądów danej (jednej) kolejności, w której istnieją napięcia równe składowym grupowym napięć tej samej kolejności co prądy (rys. 6a—6d).

Obliczenia zasadnicze wielkości elektrycznych w linii CPZ można przeprowadzać tylko w fazie podstawowej wymienionych linii zastępczych. Wszystkie prądy i napięcia w fazach linii rzeczywistej są bowiem



Rys. 6. Schematy zastępczych linii typu CPZ dla składowych symetrycznych grupowych — a. kolejności 01, b. kolejności 00, c. kolejności 11, d. kolejności 10.

proporcjonalne do składowych grupowych odpowiednio prądów i napięć w fazie podstawowej tych linii zastępczych.

W zastępczych liniach dla składowych symetrycznych grupowych każdej kolejności słuszne są wszystkie równania dla napięć i prądów danej kolejności, spełnione dla linii rzeczywistej w zakresie wielkości rzeczywistych. Na przykład równanie (68) w odniesieniu do strat napięcia w pętli „faza a — ziemia” w linii dla składowych grupowych kolejności 01 będzie

$$\Delta U_{a01} = \frac{1}{4} \sum_1^4 \Delta U_{a\alpha 01}, \quad (93)$$

a w postaci macierzowej jak (69a) tj.

$$\Delta U_{a01} = \frac{1}{4} l \Delta U_{a001} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \Delta U_{a101} \\ \Delta U_{a201} \\ \Delta U_{a301} \\ \Delta U_{a401} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} l \mathbf{Z}_0 \begin{bmatrix} I_{a01} \\ I_{b01} \\ I_{c01} \\ I_{d01} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} l \mathbf{Z}_0 \begin{bmatrix} I_{a01} \\ I_{a01} \\ -I_{a01} \\ -I_{a01} \end{bmatrix} \quad (93a)$$

Rozwijając równanie (93a) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\Delta U_{a_01} &= I_{a_01} \left[ Z_s - \frac{1}{2} (Z_{ac} + Z_{ad} + Z_{bc} + Z_{bd} - Z_{ab} - Z_{cd}) \right] = \\ &= I_{a_01} Z_{a_01} = I_{01} Z_{01} = I_{01} (Z_s - Z_{m_{01}}).\end{aligned}\quad (94)$$

Otrzymaliśmy więc wzór na oporność zastępczą dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu kolejności 01 pokrywający się ze wzorem (78).

Gdyby w tych liniach zastępczych oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych były sobie równe, wtedy obliczenie oporności zastępczych dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu jest bardzo proste. Weźmy bowiem pod uwagę np. linię zastępczą dla napięć i prądów, równych składowym symetrycznym grupowym napięć i prądów w linii rzeczywistej, kolejności 01 (rys. 6 a).

Strata napięcia w pętli ziemnopowrotnej „przewód a — ziemia” wyniesie

$$\begin{aligned}\Delta U_{a_01} &= Z_s I_{a_01} + Z_m I_{b_01} + Z_m I_{c_01} + Z_m I_{d_01} = Z_s I_{a_01} + \\ &+ Z_m I_{a_01} - Z_m I_{a_01} - Z_m I_{a_01} - Z_m I_{a_01} = (Z_s - Z_m) I_{a_01}\end{aligned}\quad (95)$$

a więc  $Z_{01} = Z_s - Z_m$ .

Podobnie w liniach zastępczych dla składowych grupowych napięć i prądów innych kolejności otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} Z_{00} = Z_s + 3Z_m \\ Z_{11} = Z_s - Z_m \\ Z_{10} = Z_s - Z_m \end{array} \right\} \quad (96)$$

Wzory (95) i (96) są więc zgodne z zależnościami (61), które zostały wyprowadzone w ogólnym przypadku linii CPZ przy założeniu:  $Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd} = Z_m$ .

Wspomnieliśmy powyżej, że nie można przepleść linii CPZ, gdy wszystkie odległości między przewodami w układzie przewodów linii są różne, aby oporności wzajemne wszystkich par pętli ziemnopowrotnych były sobie równe.

Wiele układów przewodów stosowanych w praktyce budowy linii elektroenergetycznych cechuje pewna symetria. Symetryczne umocowanie przewodów na konstrukcjach wsporczych linii stwarza pomyślne warunki statyczne dla tych konstrukcji. Przewody linii CPZ mogą być zawieszone w układach: płaskim, prostokątnym, kwadratowym, jodełkowym prostym i jodełkowym odwróconym. W każdym z tych układów co naj-

mniej dwa odstępy między przewodami są sobie równe. Istnieje więc możliwość przepłecenia linii CPZ o podanych układach przewodów tak, aby spełnione były równości

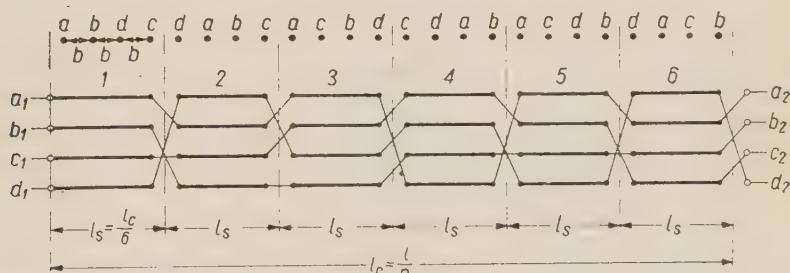
$$Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd} = Z_m.$$

Dla przykładu na rys. 7 podano jeden ze sposobów przepłecenia linii CPZ o układzie płaskim, a na rys. 8 — o układzie prostokątnym. W obu przypadkach każdy cykl przepłecenia jest podzielony na 6 sekcji o jednakowej długości.

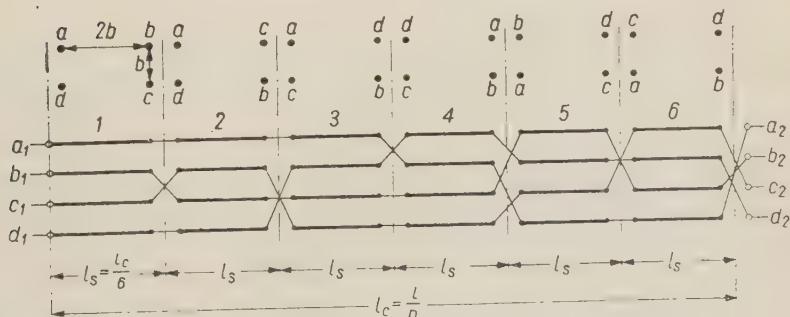
Jak łatwo udowodnić, średni odstęp między przewodami dla linii przepłecionej według rys. 7 i 8 wyraża się wzorem:

$$b_{sr} = \sqrt[6]{b_{ab} \cdot b_{ac} \cdot b_{ad} \cdot b_{bc} \cdot b_{bd} \cdot b_{cd}}, \quad (97)$$

gdzie:  $b_{ab}$ ,  $b_{ac}$ ,  $b_{ad}$ ,  $b_{bc}$ ,  $b_{bd}$  i  $b_{cd}$  są to odstępy między przewodami poszczególnych faz na dowolnej (jednej) sekcji przepłecenia.



Rys. 7. Przepłecenie 6-sekcyjne linii typu CPZ o płaskim układzie przewodów.



Rys. 8. Przepłecenie 6-sekcyjne linii typu CPZ o prostokątnym układzie przewodów.

Rozważmy na przykład linię CPZ o płaskim układzie przewodów, przepłecioną według rys. 7.

Oporności wzajemne pętli ziemnopowrotnych (ag) i (bg) wzdłuż jednego cyklu przeplecenia są odpowiednio równe:

$$\text{wzdłuż sekcji 1: } Z_{ab_1} = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{ab_1}} \right) l_s$$

$$\text{.. .. .. 2: } Z_{ab_2} = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{bd_1}} \right) l_s$$

$$\text{.. .. .. 3: } Z_{ab_3} = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{ad_1}} \right) l_s$$

$$\text{.. .. .. 4: } Z_{ab_4} = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{cd_1}} \right) l_s$$

$$\text{.. .. .. 5: } Z_{ab_5} = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{ac_1}} \right) l_s$$

$$\text{.. .. .. 6: } Z_{ab_6} = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{bc_1}} \right) l_s$$

gdzie  $b_{ab_1}$ ,  $b_{bd_1}$ , ...,  $b_{bc_1}$  są to odstępy między odpowiednimi przewodami na sekcji 1.

Oporność wzajemna rozważanej pętli wzdłuż całego cyklu jest oczywiście równa sumie oporności wzajemnej na każdej sekcji, tj.

$$\begin{aligned} Z_{ab_c} &= \sum_1^6 Z_{ab_a} = Z_{ab_0} l_c = \left( 6R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g^6}{b_{ab_1} \cdot b_{bd_1} \cdot b_{ad_1} \cdot b_{cd_1} \cdot b_{ac_1} \cdot b_{bc_1}} \right) l_c = \\ &= 6l_c \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{\sqrt[6]{b_{ab_1} \cdot b_{bd_1} \cdot b_{ad_1} \cdot b_{cd_1} \cdot b_{ac_1} \cdot b_{bc_1}}} \right) = \left( R_{g_0} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{sr}} \right) l_c, \end{aligned}$$

a więc  $b_{sr}$  jest równe wyrażeniu (97).

Zależność na średni odstęp międzyprzewodowy ( $b_{sr}$ ) dla innej pary pętli ziemnopowrotnych może nie pokrywać się ze wzorem (97), lecz wartość  $b_{sr}$  jest taka sama dla każdej z sześciu oporności wzajemnych, w tym bowiem przypadku (rys. 7) dla każdej oporności wzajemnej  $b_{sr} = \sqrt[6]{b^3 \cdot (2b)^3 \cdot 3b}$ .

Przy przepleceniach podanych na rys. 7 i 8 kolejność faz na pierwszej sekcji przeplecenia nie ma wpływu na wartość oporności linii.

Dla układu płaskiego  $b_{sr} = b \sqrt[6]{12}$ , dla układu zaś prostokątnego  $b_{sr} = b \sqrt[6]{20}$ . Oporność robocza linii CPZ o układzie płaskim jest więc nieco mniejsza od oporności roboczej linii tego typu o układzie prostokątnym.

Przeplecenie linii według rys. 7 i 8 (6-sekcyjne) ekonomicznie ustępuje przepleceniu według rys. 4 (4-sekcyjnemu), które jest wystarczające do tego, aby linia CPZ była symetryczna w normalnych warunkach pracy.

## 5. UWAGI O PRAKTYCZNYM OBLICZANIU OPORNOŚCI ZASTĘPCZYCH LINII CPZ DLA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH

W linii typu CPZ przepięcionej zgodnie z rys. 4, a więc tak, aby zastępcze oporności fazowe linii CPZ były sobie równe w warunkach normalnej pracy przy założeniu, że układy prądów w obu częściach linii CPZ są układami symetrycznymi, oporności zastępcze tak zbudowanej linii dla poszczególnych składowych symetrycznych grupowych i oporność robocza linii są różne. Oporności te wyrażają się ogólnie wzorami

$$\left. \begin{aligned} Z_r &= Z_s - Z_{m_r} \\ Z_{01} &= Z_s - Z_{m_{01}} \\ Z_{11} &= Z_s - Z_{m_{11}} \\ Z_{10} &= Z_s - Z_{m_{10}} \\ Z_{00} &= Z_s + 3Z_{m_{00}} \end{aligned} \right\} . \quad (98)$$

W tablicy 2 podano wartości jednostkowych oporności  $X_{m_r}$ , oraz  $X_{m_{01}}$ ,  $X_{m_{11}}$ ,  $X_{m_{10}}$  i  $X_{m_{00}}$ , obliczonych z ogólnej zależności dla  $f=50$  Hz:  $X_m = 0,145 \lg \frac{D_g}{b_{sr}}$  przy założeniu  $D_g = 930$  m ( $\varrho = 10^4 \Omega \text{ cm}$ ,  $f = 50$  Hz) dla trzech charakterystycznych układów przewodów i kilku wartości odległości między przewodami. Podano również wartości różnicy

$$\Delta X'_m = |X_{m_r} - X_{m_{\max}}| = |Z_r - Z_{\max}| = |\Delta Z|, \quad (99)$$

gdzie  $X_{m_{\max}}$  jest to dla danego odstępu  $b$  wartość składowej biernej oporności wzajemnej linii CPZ dla składowych grupowych kolejności 01, 11 i 10, najwięcej różniąca się od oporności  $X_{m_r}$  oraz różnicy

$$\Delta X''_m = |X_{m_r} - X_{m_{00}}|. \quad (100)$$

Na tab. 3 widać, że przeciętnie dla podanych układów przewodów  $\Delta Z = 0,06 \Omega/\text{km}$ , co stanowi 15% w przeciętnej wartości oporności roboczej  $Z_r \approx 0,4 \Omega/\text{km}$ .

Przeciętna różnica (poprawka)  $\Delta X_m \approx 0,04 \Omega/\text{km}$ , co w odniesieniu do przeciętnej wartości oporności roboczej wynosi około 10%.

Z powyższego wynika, że w praktycznych obliczeniach można założyć

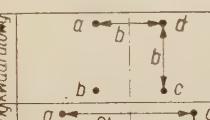
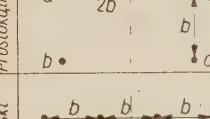
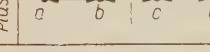
$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= Z_{11} = Z_{10} = Z_r \\ Z_{00} &= Z_s + 3Z_{m_r} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Linia CPZ przy przepięczeniu według rys. 4 jest symetryczna przy założeniu, że układy prądów w obu jej częściach są układami symetrycznymi. Układ przesyłowy typu CPZ, składający się z linii CPZ i z transformatorów na obu końcach linii, jest nadal mimo tego układem

niesymetrycznym. Fakt, że przy powyższych założeniach nie płynie prąd powrotny w ziemi pod linią CPZ, powoduje w dużym stopniu asymetrię napięć na zaciskach wymienionych transformatorów i w sieci, w której ten układ przesyłowy pracuje. Asymetria ta nie przekracza praktycznie

T a b l i c a 3

Wartości jednostkowych oporności wzajemnych dla niektórych układów przewodów linii typu CPZ dla  $f=50$  Hz i  $\rho=10^4$   $\Omega \cdot \text{cm}$ .

| Układ i rozmieszczenie przewodów |   | $b$                      | $X_{m01}$                | $X_{m11}$                | $X_{m10}$                | $X_{mr}$                 | $X_{m00}$                | $\frac{4X_m' - \Delta Z}{Z_r - Z_{max}}$ | $\frac{\Delta X_m''}{X_{mr} - X_{m00}}$ |
|----------------------------------|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--|---|
|                                  |   | $\Omega \cdot \text{km}$                 | $\Omega \cdot \text{km}$                |
| Prostokątny (kwadratowy)         |  | 1                        | 0,408                    | 0,408                    | 0,453                    | 0,408                    | 0,504                    | 0,045                                    | 0,096                                   |
|                                  |   | 3                        | 0,339                    | 0,339                    | 0,384                    | 0,339                    | 0,435                    | "  | "                                       |
|                                  |   | 7                        | 0,285                    | 0,285                    | 0,330                    | 0,285                    | 0,381                    | "  | "                                       |
|                                  |  | 1                        | 0,337                    | 0,443                    | 0,423                    | 0,412                    | 0,399                    | 0,075                                    | 0,013                                   |
|                                  |   | 3                        | 0,267                    | 0,375                    | 0,354                    | 0,342                    | 0,329                    | "  | "                                       |
|                                  |   | 7                        | 0,214                    | 0,3215                   | 0,300                    | 0,289                    | 0,276                    | "  | "                                       |
|                                  |  | 1                        | 0,351                    | 0,421                    | 0,440                    | 0,403                    | 0,404                    | 0,052                                    | 0,001                                   |
|                                  |   | 3                        | 0,283                    | 0,352                    | 0,370                    | 0,335                    | 0,336                    | "  | "                                       |
|                                  |   | 7                        | 0,229                    | 0,299                    | 0,317                    | 0,281                    | 0,282                    | "  | "                                       |
| Riaski                           |   |                          |                          |                          |                          |                          |                          |  |   |

$2 \div 3\%$ , a zatem jest niższa od dopuszczalnej ( $5\%$ ), wobec czego może nie zachodzić potrzeba jej kompensacji w sztuczny sposób (dławiki, kondensatory szeregowe). Podana wartość asymetrii upoważnia do założenia, że układy prądów w linii CPZ są układami praktycznie symetrycznymi.

Skoro asymetria napięć (i prądów) w układzie przesyłowym występuje przy przepłeceniu linii CPZ, powstaje pytanie, czy należy przeplatać linie tego typu. Może się bowiem okazać, że asymetria ta jest mniejsza w linii nieprzepłecionej w porównaniu z asymetrią gdy linia jest symetryczna.

Określenie asymetrii napięć w układzie, gdy linia CPZ nie jest symetryczna, wymagałoby żmudnych obliczeń (jeśli w ogóle są one możliwe) lub pomiaru w sieciach rzeczywistych.

Wydaje się, że przeplatanie linii CPZ średnich napięć może nie być uzasadnione w praktyce. Nie można przeplatać linii tylko w tym celu, aby jej obliczenie było łatwiejsze. Można jednak założyć, że linia CPZ jest symetryczna niezależnie od tego, czy jest przepłeciona czy nie.

Mając na uwadze powyższe względy i poczynione założenia, tym bardziej w praktyce obliczania linii CPZ można założyć, że

$$Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_r = Z_s - Z_m = \left( R_o + j 0,145 \lg \frac{b_{sr}}{r_e} \right) l \quad | \quad (102)$$

$$i \quad Z_{00} - Z_s + 3Z_m = 4 \left[ R_u + \left( \frac{R_o}{4} + R_{go} + j 0,145 \lg \frac{D_g}{\sqrt[4]{b_{sr}^3 \cdot r_e}} \right) l \right] \quad |$$

przy czym przyjmując:

$$b_{sr} = b_{sr_r} = \sqrt[4]{(b_{ac} \cdot b_{bd})^2 \cdot \frac{b_{ab} \cdot b_{cd}}{b_{ad} \cdot b_{bc}}} \quad |$$

$D_g = 1000 \text{ m},$

$R_{go} = 0,05 \text{ } \Omega/\text{km}.$

(103)

## 6. ZAKOŃCZENIE

Zasady składowych symetrycznych grupowych znalazły zastosowanie przede wszystkim do obliczeń sieci przy błędach w liniach typu CPZ (zwarcia, przerwy w przewodach). W stanie normalnej pracy linii CPZ obliczenia można przeprowadzać również w oparciu o te zasady, tym bardziej, że w warunkach normalnych składowe symetryczne grupowe napięć i prądów kolejności 10 i 00 są równe zeru w każdym elemencie sieci. Jednak obliczanie sieci, w których pracują linie CPZ, metodą składowych grupowych, wymaga znajomości obliczania oporności zastępczych wszystkich elementów sieci w obwodzie prądu, a więc nie tylko oporności zastępczych linii typu CPZ, lecz także oporności transformatorów połączonych z linią tego typu i elementów sieci normalnych (trójfazowych trójprzewodowych). W pracy niniejszej próbowało rozwiązać więc tylko jedno z zagadnień obliczania sieci o liniach typu CPZ metodą składowych symetrycznych grupowych.

Obliczanie sieci o liniach typu CPZ, szczególnie przy stanach awaryjnych w liniach tego typu metodą składowych symetrycznych grupowych, która niewątpliwie jest wygodniejsza od innych tego rodzaju obliczeń, jest bardziej złożone od obliczeń przy błędach w sieciach normalnych metodą składowych symetrycznych trójfazowych. Zagadnienie dodatkowo komplikuje się w przypadku obliczania sieci w której pracują linie typu CPZ przy błędach w elementach sieci normalnej, powiązanej z siecią typu CPZ. Trudność wynika tu przede wszystkim z tego, że w obwodzie zwarcia znajdują się niesymetryczne układy przesyłowe lub sieci typu CZP, których schematy zastępcze dla składowych symetrycznych trójfazowych są złożone i nawzajem powiązane galwanicznie i za pośrednictwem przekładników o odpowiednich przekładniach.

W zakończeniu autor wyraża podziękowanie mgrowi inż. Andrzejowi Przyłuskiemu za wnikliwe i cenne uwagi.

Zakład Elektroenergetyki  
Politechniki Łódzkiej

## WYKAZ LITERATURY

1. Andriejew W. W.: *Czterechfaznaja schema elektropieriedacz s trzechfaznymi transformatorami*, Elektriczn., 1952, nr 1, s. 15.
2. Buchholz H.: *Untersuchungen über die Wärme die magnetische Energie*

und das Induktionsgesetz bei Mehrfachleitersystemen unter Berücksichtigung des Einflusses der Erde, Archiv für Elektrot. 1928, t. 21, s. 106.

3. Carson I. R.: Wave propagation in overhead wires with ground return, Bell. Syst. Techn. Journ. 1926, t. 5, s. 539.
4. Cholewicki T.: Macierze składowych symetrycznych, Archiw. Elektrot. 1954, t. III, s. 231.
5. Ebin L. E.: Ekonomicznyje schemy elektropieriedaczi i metody ich rasczota, Elektriczn. 1952, nr 1, s. 23.
6. Filsztinski A. A.: Czetyriech prowodnaja elektropieriedacza kak sredstwo powyszenia ekonomicznosti i nadieznosti wysokowoltnych sietiej, Elektriczn. 1952, nr 1, s. 17.
7. Krakowski M.: Obliczanie linii przesyłowych „dwa przewody-ziemia“ przy założeniu, że przewodząca warstwa ziemna ma wymiary skończone — praca kandydacka wykonana w Katedrze Podstaw Elektrotechniki Pol. Łódz. w 1956 r. (nie publikowana).
8. Rosenzweig J.: Składowe symetryczne układów wielofazowych, Przegl. Elektrot. nr 10, 1936, s. 387.
9. Wagner W.: Symmetrische Komponenten für Mehrphasensysteme, Archiv für Elektrot., nr 10, 1935.
10. Kowalski Zb.: Oporności i schematy zastępcze napowietrznych linii średnich napięć typu „cztery przewody-ziemia“, Rozprawy Elektrot., nr 3, 1958.

СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ «ЧЕТЫРЕ ПРОВОДА - ЗЕМЛЯ» (ЧПЗ) В СИСТЕМЕ СИММЕТРИЧНЫХ ГРУППОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Резюме

1. Вступление

Работа содержит дальнейшее развитие теории симметричных групповых составляющих в применении к расчетам электроэнергетических систем и сетей «четыре провода - земля» (ЧПЗ). В особенности рассмотрена в работе проблема заместительных сопротивлений воздушных линий средних напряжений без молниеотводных проводов для симметричных групповых составляющих и даны связанные с этим свойства линий ЧПЗ для составляющих этого типа.

2. Общие свойства линий типа ЧПЗ

На рис. 2 дана схема линии типа ЧПЗ. Линии передачи типа ЧПЗ имеют некоторые преимущества в сравнении с нормальными (трехфазными, трехпроводными) линиями. В таких линиях земля, в качестве провода для обратных токов, играет роль фазы. Если системы токов в линиях являются системами соответственно симметричными, то в земле ток не течет. Это явление получается благодаря применению по крайней мере по одной паре трансформаторов с соответственными группами соединений на обоих концах линии ЧПЗ. Линия ЧПЗ замещает нормальную шестипроводную линию. Подвешивая в линии четвертый провод можно передать по линии ЧПЗ двойную мощность в сравнении с трехфазной трехпроводной линией. Эти существенные преимущества линии ЧПЗ получаются ценой увеличения напряжений в линии.

В пределах средних напряжений увеличение напряжений в линии по отношению к земле и увеличение напряжений между проводами не имеет существенного значения. Поэтому линии ЧПЗ могут найти применение главным образом в пределах этих напряжений.

### 3. Основные уравнения для симметричных групповых составляющих в передаточной системе типа ЧПЗ

Во вступлении переписаны общие уравнения для симметричных составляющих, называемых здесь нормальными симметричными составляющими для  $n$ -фазной системы с  $n$ -проводами, данные независимо Розенцвайгом и Вагнером. Основываясь на этих уравнениях, даны подробные зависимости симметричных нормальных составляющих для 4-фазной 4-проводной системы, к которой может быть причислена линия типа ЧПЗ. Рассматривая линию ЧПЗ, как линию состоящую из двух линий типа «два провода - земля» со специфическими свойствами, можно в каждой из этих линий разложить напряжения проводов по отношению к земле и токи в проводах на симметричные нормальные 2-фазные составляющие. Разлагая далее 2-фазные составляющие той же последовательности в обеих частях линии ЧПЗ опять таки на 2-фазные симметричные составляющие, мы получим специальные 4-фазные симметричные составляющие, называемые групповыми симметричными составляющими, или вкратце — групповыми составляющими.

В настоящей работе даны уравнения связывающие фазные напряжения и токи линии ЧПЗ с их групповыми составляющими (19, 20).

### 4. Заместительные сопротивления линии типа ЧПЗ для симметричных групповых составляющих

В начальной части этой главы даны основные определения и уравнения потери напряжения в земляных обратных петлях линии ЧПЗ, зависимости заместительных рабочих сопротивлений линии этого типа и их свойства в нормальных рабочих условиях.

Как основу анализа линий ЧПЗ в нормальных условиях и для групповых составляющих принято уравнение потери напряжения в отдельных земляных обратных петлях линии вида:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa}, & Z_{ab}, & Z_{ac}, & Z_{ad}, \\ Z_{ba}, & Z_{bb}, & Z_{bc}, & Z_{bd}, \\ Z_{ca}, & Z_{cb}, & Z_{cc}, & Z_{cd}, \\ Z_{da}, & Z_{db}, & Z_{dc}, & Z_{dd}, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} \quad (1)$$

где  $I_a, I_b, I_c, I_d$  токи в фазах  $a, b, c, d$  линии ЧПЗ. Собственные и взаимные сопротивления земляных обратных петель в уравнении (1) определены в настоящей работе. Даны притом практические формулы для вычисления их значений.

Автор написал уравнения (1) на том основании, что систему «четыре провода - земля» можно заместить четырьмя земляными обратными петлями, между которыми существуют магнитные напряжения, ибо земля под линией ЧПЗ является обратной дорогой для токов проводов линии.

Если линия типа ЧПЗ построена так, что

$$Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd} = Z_m \quad (2a)$$

и если все провода линии одинаковы, т. е. если

$$Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc} = Z_{dd} = Z_s, \quad (2b)$$

тогда

$$\begin{aligned}\Delta U_a &= (Z_s - Z_m) I_a = Z_r I_a \\ \Delta U_b &= (Z_s - Z_m) I_b = Z_r I_b \\ \Delta U_c &= (Z_s - Z_m) I_c = Z_r I_c \\ \Delta U_d &= (Z_s - Z_m) I_d = Z_r I_d.\end{aligned}\tag{3}$$

Сопротивление  $Z_r$  мы называем заместительным рабочим сопротивлением линии ЧПЗ.

Сходные с (3), но приблизительно удовлетворяющие уравнения получаются в случае переплетения линии ЧПЗ по рис. 4 — (четыре секции в цикле переплетения).

После разложения потерь напряжения и токов в линии на групповые составляющие, получено следующее уравнение для групповых составляющих потерь напряжения в линии ЧПЗ в основной фазе (фаза  $a$ ):

$$\left[ \begin{array}{c} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} Z_{01_{01}}, & Z_{01_{00}}, & Z_{01_{11}}, & Z_{01_{10}} \\ Z_{00_{01}}, & Z_{00_{00}}, & Z_{00_{11}}, & Z_{00_{10}} \\ Z_{11_{01}}, & Z_{11_{00}}, & Z_{11_{11}}, & Z_{11_{10}} \\ Z_{10_{01}}, & Z_{10_{00}}, & Z_{10_{11}}, & Z_{10_{10}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{array} \right] \tag{4}$$

Приведенные в уравнении (4) сопротивления  $Z$  являются сопротивлениями для групповых составляющих напряжения данной последовательности и для тока определенной последовательности, так напр. сопротивление  $Z_{01_{00}}$  называется сопротивлением для групповых составляющих напряжения последовательности 01 и тока последовательности 00; сопротивление  $Z_{11_{11}}$  — является сопротивлением  $\vartheta$  для групповых составляющих напряжения и тока последовательности 11.

Если исполнены зависимости (2a) и (2b), тогда

$$\begin{aligned}Z_{01_{00}} &= Z_{01_{11}} = Z_{01_{10}} = Z_{00_{01}} = Z_{00_{11}} = Z_{00_{10}} = \\ &= Z_{11_{01}} = Z_{11_{00}} = Z_{11_{10}} = Z_{10_{01}} = Z_{10_{00}} = Z_{10_{11}} = 0,\end{aligned}\tag{5}$$

а также

$$\left. \begin{aligned}Z_{01_{01}} &= Z_{11_{11}} = Z_{10_{10}} = Z_s = Z_m = Z_r \\ \text{и } Z_{00_{00}} &= Z_s + 3Z_m\end{aligned} \right\} \tag{6}$$

тогда:

$$\left. \begin{aligned}\Delta U_{01} &= (Z_s - Z_m) I_{01} = Z_{01_{01}} I_{01} = Z_{01} I_{01} \\ \Delta U_{00} &= (Z_s + 3Z_m) I_{00} = Z_{00_{00}} I_{00} = Z_{00} I_{00} \\ \Delta U_{11} &= (Z_s - Z_m) I_{11} = Z_{11_{11}} I_{11} = Z_{11} I_{11} \\ \Delta U_{10} &= (Z_s - Z_m) I_{10} = Z_{10_{10}} I_{10} = Z_{10} I_{10}\end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Доказано, что когда линия ЧПЗ переплется согласно рис. 4, тогда правильны уравнения (5) и заместительные сопротивления для групповых составляющих выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned}Z_{01} &= Z_s - Z_{m_{01}} \\ Z_{00} &= Z_s + 3Z_{m_{00}} \\ Z_{11} &= Z_s - Z_{m_{11}} \\ Z_{10} &= Z_s - Z_{m_{10}}\end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Взаимные сопротивления  $Z_{m_{01}}$ ,  $Z_{m_{00}}$ ,  $Z_{m_{11}}$  и  $Z_{m_{10}}$  в общем не равны между собой. Общий вид уравнения (7) в этом случае исполнен.

В работе даны подробные зависимости для рабочих сопротивлений и для групповых составляющих линии ЧПЗ в различных системах проводов в предположении, что линия ЧПЗ переплется по рис. 4.

Из уравнения (7) следуют заместительные схемы сопротивления линии ЧПЗ для групповых составляющих, которые даны на рис. 5.

Установлено также, что не всякую линию ЧПЗ можно переплести таким образом, чтобы удовлетворены были уравнения (2a). Применяемые на практике системы проводов обнаруживают некоторую симметрию. В таких случаях переплетение линии ЧПЗ возможно таким образом, чтобы взаимные сопротивления всех пар обратных земляных петель были между собой равны. Следует тогда применить 6-секционное переплетение, которого примеры даны на рис. 7 и 8.

#### 5. Заметки относительно практического расчета заместительных сопротивлений линии ЧПЗ для симметричных групповых составляющих

Для получения симметричности линии ЧПЗ в нормальных условиях, т. е. чтобы заместительные фазные сопротивления линии были между собою равны, достаточно переплести ее провода согласно рис. 4. Однако тогда заместительные сопротивления построенной таким образом линии для групповых составляющих последовательности 01, 11 и 10 отличаются друг от друга и не равны рабочему сопротивлению линии. Несмотря на переплетение линии по рис. 4 система передачи типа ЧПЗ, состоящая из линии ЧПЗ и из трансформаторов на обоих её концах, остаётся в дальнейшем несимметричной системой при нормальных рабочих условиях. Эта асимметрия, как утверждает автор, не превышает 2—3%, и она допустима по предписаниям многих государств (5%). Если линия не будет переплетена, то асимметрия напряжений и токов в линии может быть не более 5% и даже, может быть, меньше 2%. Поэтому переплетение линий ЧПЗ может не быть, как кажется, достаточно обоснованным на практике. Можно однако предположить, что линия типа ЧПЗ симметрична независимо от того, будет ли она соответственным образом переплетена или нет.

Поэтому автор статьи рекомендует пользоваться в практических расчетах зависимостями:

$$Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_r = Z_s - Z_m \quad (9)$$

и  $Z_{00} = Z_s + 3Z_m$ .

В работе даны практические формулы для расчёта вышеприведенных заместительных сопротивлений.

#### 6. Заключение.

В заключении упомянуто применение зависимостей на практике к расчетам сетей, в особенности при наличии изъянов (короткие замыкания) в передаточных системах типа ЧПЗ по методу групповых составляющих и приведены некоторые задачи связанные с расчетом сетей, в которых работают линии типа ЧПЗ.

### IMPEDANCES OF ELECTRIC POWER LINES „FOUR WIRE — GROUND“ TYPE IN THE SYSTEM OF GROUP SYMMETRICAL COMPONENTS

#### Summary

##### 1. Introduction

The subject of this paper is the description of further development of theory of the group symmetrical components in application to the calculation of the transmission system and „four wire-ground“ type lines FWG (CPZ). In particular the problem of the equivalent impedances of middle voltage aerial lines without

protective wire for the group symmetrical components is discussed and the properties of FWG lines for these components are specified.

## 2. General properties of FWG (CPZ) type lines

Fig. 2 shows the scheme of FWG line. The transmission lines of FWG type have certain advantages in comparison with normal lines (three-phase three-wire). In these lines the ground being the medium for the reverse currents acts as a phase. If the current schemes of these lines are adequately symmetrical the current does not flow in the earth. This phenomenon is attained by incorporation of at least two pairs of transformers with adequate groups of connections on both ends of FWG line.

The FWG line substitutes the normal two-way line (six-wire). By suspension of the fourth wire in the line it is feasible to transmit through FWG line twice as great power as that transmitted through an one-way three-phase three-wire line. It is an account of voltage increase in the line that these essential advantages of FWG line are achieved. Within range of middle voltages the increase of circuit voltage or the voltage of the line in relation to the ground does not play an essential part. Hence FWG lines may find the application within range of middle voltages chiefly.

## 3. Fundamental equations for the group symmetrical components in transmission system of FWG type

At the outset the general equations for the symmetrical components, called here the symmetrical normal components for  $n$ -phase  $n$ -wire system, in form cited by Rosenzweig and Wagner independently, have been introduced. On the basis of these equations the detailed dependencies are given for the normal symmetrical components of four-phase four-wire system to which the FWG line may be enlisted. The FWG line may be considered as a line composed of two lines the „two-wire-ground“ type incorporating the specific properties.

In each of two lines the voltages in the wires in relation to the ground and the currents in the wires may be resolved into two-phase symmetrical normal components.

Resolving additionally two-phase components of the same sequence of both parts of FWG line into two-phase normal symmetrical components the special four-phase symmetrical components so-called the group symmetrical components or just group components are obtained.

The equations (19, 20) linking the phase currents and voltages of FWG line with the group components are then given.

## 4. Equivalent impedances of FWG line for the group symmetrical components

In initial part of this chapter the basic definitions and equations for the voltage losses in the loops of ground-remitting FWG lines and the dependencies of the equivalent operating impedances of such a line with its properties in normal work conditions are cited.

To analyse the FWG line in normal conditions the equations expressing the voltage losses in the particular loop of ground-remitting line for the group components are given as below:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} U_a & \left| \begin{array}{c} Z_{aa}, Z_{ab}, Z_{ac}, Z_{ad} \\ Z_{ba}, Z_{bb}, Z_{bc}, Z_{bd} \\ Z_{ca}, Z_{cb}, Z_{cc}, Z_{cd} \\ Z_{da}, Z_{db}, Z_{dc}, Z_{dd} \end{array} \right| & I_a \\ U_b & = & I_b \\ U_c & & I_c \\ U_d & & I_d \end{array} \quad (1)$$

where

$I_a, I_b, I_c, I_d$  are the currents in phase  $a, b, c, d$  of FWG line. The mutual and self impedances of ground-remiting loops expressed in equation (1) are obtained at the work and the practical value formulae for their evaluations are given.

The assumption that the system „four-wire-ground“ may be substituted by the four ground-remiting loops between which exist the magnetic linkages, as the earth under FWG line serves as the return way for the transmission line, entitles the author to introduce the equation (1).

If the FWG line is built in way that

$$Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{ad} = Z_{bc} = Z_{bd} = Z_{cd} = Z_m \quad (2a)$$

and all the wires of the line are the same i. e.

$$Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc} = Z_{dd} = Z_s, \quad (2b)$$

then

$$\begin{aligned} \Delta U_a &= (Z_s - Z_m) I_a = Z_r I_a \\ \Delta U_b &= (Z_s - Z_m) I_b = Z_r I_b \\ \Delta U_c &= (Z_s - Z_m) I_c = Z_r I_c \\ \Delta U_d &= (Z_s - Z_m) I_d = Z_r I_d, \end{aligned} \quad (3)$$

where

$Z_r$  = equivalent operating impedance of FWG line.

Similar equation to the equation (3), but approximately satisfied, is obtained in the case of interwoven FWG line according to Fig. 4 (four section in a interwoven cycle).

After the resolution of the voltage lossel and currents in the line in to the group components the following equation for the group components of the voltage lossel in FWG line of basic phase (a-phase) is obtained

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{01} \\ \Delta U_{00} \\ \Delta U_{11} \\ \Delta U_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{0101}, & Z_{0100}, & Z_{0111}, & Z_{0110} \\ Z_{0001}, & Z_{0000}, & Z_{0011}, & Z_{0010} \\ Z_{1101}, & Z_{1100}, & Z_{1111}, & Z_{1110} \\ Z_{1001}, & Z_{1000}, & Z_{1011}, & Z_{1010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{00} \\ I_{11} \\ I_{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

The impedances mentioned in the equation (4) refer to the group components of the voltage of a given sequence and the current of a defined sequence. For instance  $Z_{0100}$  denotes an impedance for the group components of the voltage of 01 sequence and the current of 00 sequence:  $Z_{1111}$  denotes the impedance for the group components of the voltage and current of 11 sequence.

If the dependencies (2a) and (2b) are satisfied then

$$\left. \begin{aligned} Z_{0100} &= Z_{0111} = Z_{0110} = Z_{0001} = Z_{0011} = \\ &= Z_{1101} = Z_{1100} = Z_{1110} = Z_{1001} = Z_{1010} = Z_{1011} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

and

$$\left. \begin{aligned} Z_{0101} &= Z_{1111} = Z_{1010} = Z_s - Z_m = Z_r \\ Z_{0000} &= Z_s + 3Z_m \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Hence

$$\begin{aligned}
 \Delta U_{01} &= (Z_s - Z_m) I_{01} = Z_{01_{01}} I_{01} = Z_{01} I_{01}, \\
 \Delta U_{00} &= (Z_s + 3Z_m) I_{00} = Z_{00_{00}} I_{00} = Z_{00} I_{00}, \\
 \Delta U_{11} &= (Z_s - Z_m) I_{11} = Z_{11_{11}} I_{11} = Z_{11} I_{11}, \\
 \Delta U_{10} &= (Z_s - Z_m) I_{10} = Z_{10_{10}} I_{10} = Z_{10} I_{10}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

It has been proved if the FWG line is interwoven according to Fig. 4 then the equation (7) is satisfied and the equivalent resistances for the group components are expressed by the formulas

$$\begin{aligned}
 Z_{01} &= Z_s - Z_{m_{01}} \\
 Z_{00} &= Z_s + 3Z_{m_{00}} \\
 Z_{11} &= Z_s - Z_{m_{11}} \\
 Z_{10} &= Z_s - Z_{m_{10}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

In general the mutual impedances  $Z_{m_{01}}$ ,  $Z_{m_{00}}$ ,  $Z_{m_{11}}$  and  $Z_{m_{10}}$  are not equal to each other and the general form of the equation (7) is satisfied.

The detailed dependencies for the operating impedances and the group components of the FWG lines of various wire systems under assumption that the FWG line is interwoven according to Fig. 4 are given. The equivalent impedance schemes of the FWG line for the group components given in Fig. 5 are deduced from the equations (7).

It has been established that not each of the FWG lines can be interwoven in such a way as to satisfy the equations (2a).

The wire systems used in practice display a certain symmetry. In those cases the FWG line may be interwoven in such a manner that the mutual resistances of all pairs of the ground-remitting loops are between themselves equal. The four-sectional interweaving should be then used and the examples of it are shown in Figs 7 and 8.

##### 5. Remarks about practical calculation of the equivalent impedances of FWG line for the symmetrical group components

To get a FWG line symmetrical in normal conditions, i. e. the equivalent phase impedances should be mutually equal, it is sufficient to interweave the wires according to Fig. 4.

In such a case, however, the equivalent impedances for the group components of 01, 11 and 10 sequence differ between themselves and are not equal to the impedance of the operating line.

In spite interweaving of the line according to Fig. 4 the transmission system of the FWG type composed of FWG line and the transforms on both its ends is still unsymmetrical in normal work conditions. Such an asymmetry, as the author states, does not exceed 2—3% and it is, therefore, admissible according to the regulations of many countries (5%). In the case of interwoven line the asymmetry of the voltages and currents of the line should not exceed 5%, it may be even smaller than 2%.

It seems, therefore, that interweaving of the FWG line for the middle voltages may be unjustified, in practice. But it may be assumed, however, that the FWG line is symmetrical irrespectively is it adequately interwoven or not.

Due to such an assumption the author suggests to carry out the practical calculation according to the dependencies:

$$\begin{aligned} Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_r = Z_s - Z_m \\ Z_{00} = Z_s + 3Z_m \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (9)$$

and

The paper presents then the practical formulae permitting to evaluate the above mentioned equivalent impedances.

#### 6. Conclusion

In final chapter the application of the dependencies for the calculation of the lines and, in particular, by faults such as the short-circuits, breakage in transmission FWG systems, with the aid of the group component method is mentioned and some problems connected with the calculation of the lines in which FWG line are operating are listed.



621.3.012.8.001.2:534.143

R. SUWALSKI

## Obliczenie elektrycznego układu zastępczego obciążonego prętowego przetwornika magnetostrykcyjnego

*Rękopis dostarczono 19. 2. 1958*

Magnetostrykcyjny przetwornik prętowy potraktowano w niniejszej pracy jako element o stałych rozłożonych. Na podstawie zasadniczych równań falowych, uwzględniając wypływające ze zjawiska magnetostrykcyjnego zależności znaleziono oddziaływanie przebiegów mechanicznych na magnetyczne, a dalej na elektryczne. Oddziaływanie to ujęto wzorami, z których określono elektryczny układ zastępczy przetwornika przy dowolnym obciążeniu i dowolnej częstotliwości napędzającej. Dla normalnych warunków pracy, tzn. dla częstotliwości rezonansu mechanicznego przetwornika i dla niewielkiego obciążenia, wyprowadzono wzory uproszczone.

Słuszność rozważań teoretycznych sprawdzono eksperymentalnie. Po przeprowadzeniu pomiarów współczynnika magnetostrykcyjnego blach niklowych wykonano z tych blach próbnego przetwornika prętowego. Posługując się wyprowadzonymi wzorami obliczono dla niego wartości elementów elektrycznego układu zastępczego przy różnych obciążeniach, zakładając pracę na częstotliwości rezonansu mechanicznego. Następnie obciążając przetwornik zmierzono te same wartości. Porównanie wyników obliczeń i pomiarów wykazało dużą zgodność.

### 1. WSTĘP

Przetworniki magnetostrykcyjne są prawie jedynymi urządzeniami używanymi do wytwarzania drgań ultradźwiękowych o częstotliwościach poniżej 40 kHz, a zakres ich skutecznego działania sięga częstotliwości 200—300 kHz.

Istnieją dwa zasadnicze typy przetworników magnetostrykcyjnych, różniące się kształtem. Są to: przetwornik toroidalny oraz przetwornik o kształcie prostego pręta nie mający ustalonej nazwy. Nazwiemy go przetwornikiem prętowym.

Przetwornik toroidalny jest stosowany w technice ultradźwiękowej stosunkowo rzadko, prawie jedynie w urządzeniach sygnalizacji podwodnej, skąd także ostatnio jest wypierany przez różne odmiany przetworników prętowych. Natomiast użycie przetwornika prętowego jest coraz szersze, szczególnie do zastosowań czynnych ultradźwięków, w związku z jego zaletami: możliwością dostarczenia dużej mocy i sto-

sunkowo skupionej wiązki promieniowania, dużą wytrzymałością mechaniczną samego przetwornika oraz niewielkimi wartościami napięć występujących na zaciskach cewki przetwornika. Tym zapewne tłumaczyć należy fakt, że ostatnio na ogół w pracach traktujących o przetwornikach magnetostrykcyjnych omawia się przetworniki prętowe.

Prace nad zastosowaniem oscylatorów magnetostrykcyjnych jako wzorców częstotliwości prowadził już Pierce, publikując je w 1928 r. [8]. Jednak podstawową i prawie już dziś klasyczną pracą teoretyczną na ten temat jest praca Butterwortha i Smitha [3] opublikowana w 1931 r. Jest to wyprowadzenie elektrycznego układu zastępczego toroidalnego oscylatora magnetostrykcyjnego drgającego w powietrzu (a więc nieobciążonego). Jest charakterystyczne, że chociaż jako wzorce częstotliwości stosowano przede wszystkim oscylatory prętowe, pierwsza praca teoretyczna pojawiła się na temat oscylatorów toroidalnych. Powodem tego był najprawdopodobniej fakt, że drgania oscylatorów toroidalnych są łatwiejsze do ujęcia matematycznego. Amplituda bowiem drgań oscylatora toroidalnego jest jednakowa na całym obwodzie oscylatora, podczas gdy dla oscylatora prętowego zmienia się wzduż jego osi.

Tematyka oscylatorów magnetostrykcyjnych została podjęta w okresie rozwoju zastosowań techniki ultradźwiękowej, gdy zostały one zastosowane jako przetworniki ultraakustyczne.

Prawie wszystkie ujęcia sprowadzają rozpatrywanie drgań pręta magnetostrykcyjnego, będącego z akustycznego punktu widzenia układem o stałych rozłożonych, do rozpatrzenia pewnego zastępczego wibratora o stałych skupionych, analogicznego do przetwornika toroidalnego. Wyjątkiem jest tu ujęcie Masona [6]. Jednak zarówno i on i inni autorzy, jak Schonfeld [10], Bergmann [1] czy Nødtvedt [7] podają obliczone teoretycznie wartości liczbowe elementów układu zastępczego przetwornika tylko dla przetwornika nieobciążonego.

Jest to dość niedogodne przy projektowaniu przetworników szczególnie dla czynnych zastosowań ultradźwięków.

W niniejszej pracy wzory na konkretne wartości liczbowe elementów elektrycznego układu zastępczego obciążonego przetwornika prętowego wyprowadzono teoretycznie, przy założeniu tylko znajomości parametrów materiałowych oraz wymiarów przetwornika i impedancji akustycznych obciążających jego płaszczyzny końcowe. Zastosowano metodę analizy przebiegów akustycznych w przetworniku, który potraktowano jako linię akustyczną o stałych rozłożonych. Uzyskane wzory są zupełnie ogólne i można je wykorzystać przy dowolnych warunkach pracy przetwornika. Dla normalnych warunków pracy wzory znacznie się upraszczają.

Przeprowadzone pomiary wykazały dobrą zgodność wartości zmierzonych z obliczonymi teoretycznie.

## 2. TEORETYCZNE WYPROWADZENIE WZORÓW NA WARTOŚCI ELEMENTÓW ELEKTRYCZNEGO UKŁADU ZASTĘPCZEGO PRĘTOWEGO PRZETWORNIKA MAGNETOSTRYKCYJNEGO

### Magnetostrykcja

Efekty magnetostrykcyjne dzielą się na efekty proste i odwrotne. Efekty proste — to zmiana stanu mechanicznego ciała ferromagnetycznego, wywołana przez zachodzące w nim zmiany stanu magnetycznego. Odpowiednio efekt odwrotny jest zmianą stanu magnetycznego wywołaną przez zmiany mechaniczne.

Istnieje wiele odmian efektów magnetostrykcyjnych ze względu na rodzaj zmian mechanicznych, zachodzących przy zmianie pola magnetycznego. Najbardziej znana jest magnetostrykcja liniowa (efekt Joule'a) polegająca na zmianie długości ciała przy zmianie pola magnetycznego. Dalsze, różnego rodzaju zjawiska skrętne, giętne, zmian objętości, to zjawiska Guillemina, Wiedemanna, Barretta, Villariego, Wertheima, Nagaoka-Honda i inne.

Ogólnie mówiąc, zjawiska te zwykle występują wspólnie. Jednak większość z nich jest niezwykle słabo zauważalna w porównaniu z efektem Joule'a, który chociaż również trudny do obserwacji, znacznie przewyższa pod tym względem pozostałe.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do rozpatrywania efektu Joule'a. Efekt ten jest parzysty, to znaczy dla danego nienamagnesowanego materiału zwrot odkształcenia nie zależy od zwrotu przyłożonego pola magnetycznego (np. pręt niklowy skraca się zawsze pod wpływem pola magnetycznego). Znaczy to, że o ile przyłożymy do pręta magnetostrykcyjnego zmienne pole magnetyczne o pewnej częstotliwości, będzie on drgał z częstotliwością dwukrotnie większą.

Aby uniknąć tego zjawiska, polaryzuje się zwykle materiał dość silnym stałym polem magnetycznym, na które dopiero zostaje nałożone pole zmienne. Wtedy, o ile pole stałe jest większe niż amplituda pola zmiennego, częstotliwość drgań pręta jest taka sama jak częstotliwość przyłożonego pola.

### Zasadnicze równania magnetostrykcji

Można wykazać, że w elemencie materiału, wykazującego własności magnetostrykcyjne, spolaryzowanym stałym polem magnetycznym o natężeniu  $H_0$ , zachodzą następujące związki funkcjonalne:

$$\sigma = \sigma(s, B) \quad (1)$$

$$B = B(H, S) \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma$  — naprężenie,

$$s = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{— odkształcenie,}$$

$x$  — współrzędna liniowa,  
 $\xi$  — wydłużenie,  
 $B$  — indukcja magnetyczna,  
 $H$  — natężenie pola magnetycznego.

Różniczkując równania (1) i (2)

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds + \frac{\partial \sigma}{\partial B} \cdot dB$$

$$dB = \frac{\partial B}{\partial H} dH + \frac{\partial B}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial s} ds$$

i zastępując odpowiednio pochodne cząstkowe ich technicznymi oznaczeniami

$-\frac{\partial \sigma}{\partial s} = Y$  — moduł sprężystości (przy oznaczeniu sił ściskających jako dodatnich),

$\frac{\partial B}{\partial H} = \mu$  — przenikalność magnetyczna,

$\frac{\partial \sigma}{\partial B} = b$  — współczynnik magnetostrykcyjny,

$\frac{\partial H}{\partial s} = k = 4\pi b$  — odwrotny współczynnik magnetostrykcyjny,

otrzymujemy podstawowe równania magnetostrykcyjne:

$$d\sigma = -Yds + bdB$$

$$dB = \mu dH + \mu kds.$$

Należy tutaj zaznaczyć, że we wzorach tych  $b$ ,  $k$  oraz  $\mu$  są stałymi parametrami tylko dla ustalonego materiału i ustalonej wartości natężenia polaryzującego pola  $H_0$ . Dla małych sinusoidalnych wartości naprężenia, indukcji, odkształcenia i natężenia pola magnetycznego, można zastąpić różniczki przez odpowiednie wartości chwilowe. Otrzymamy w ten sposób spotykane w literaturze [5], [6] równania:

$$\sigma = -Ys + bB \quad (3)$$

$$B = \mu(H + ks) = \mu H. \quad (4)$$

Analiza przebiegów w przetworniku magnetostrykcyjnym

Z równania (3) zastępując  $s$  przez  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  oraz zakładając bezźródłowość indukcji w przecie, czyli  $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$  łatwo uzyskujemy równanie fali akustycznej w przecie jako

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

gdzie  $c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$  — prędkość rozchodzenia się fal w pręcie.

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest

$$\xi = A_1 e^{j(\omega t - ax)} + A_2 e^{j(\omega t + ax)}, \quad (6)$$

gdzie  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  — częstotliwość,

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \quad \text{stała falowa.}$$

Z równań (3) i (6), różniczkując (3) względem  $x$  oraz  $t$ , i wstawiając warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\xi}_0, & \text{dla } x=0 \\ \sigma &= \sigma_0, \end{aligned}$$

gdzie  $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$  rugujemy  $A_1$  i  $A_2$  i otrzymujemy zależność stanu w dowolnym punkcie pręta od stanu na początku pręta

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \cos ax - j \frac{\sigma_0 - bB}{\rho c} \sin ax, \quad (7)$$

$$\sigma - bB = (\sigma_0 - bB) \cos ax - j \dot{\xi}_0 \rho c \sin ax. \quad (8)$$

Zauważmy, że  $\dot{\xi}$  przedstawia prędkość cząstkową,  $\sigma$  zaś ciśnienie akustyczne w dowolnym punkcie pręta.

Zakładamy teraz, jako warunki brzegowe, że pręt jest obciążony na końcach ośrodkami o akustycznych impedancjach jednostkowych  $z_0$  i  $z_1$ . Uwzględniając to w równaniach (7) i (8), odpowiednio przekształcając i eliminując z równań prędkości cząstkowe i ciśnienia akustyczne na końcach pręta, otrzymujemy wyrażenie na prędkość cząstkową w dowolnym punkcie pręta zależną tylko od wartości działającej indukcji  $B$  i wielkości biernych

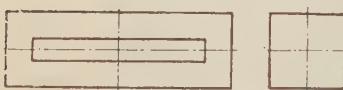
$$\dot{\xi} = \frac{bB \left( 1 - \cos al - j \frac{z_1}{\mathfrak{z}} \sin al \right) \left( \cos ax + j \frac{z_0}{\mathfrak{z}} \sin ax \right)}{(z_0 + z_1) \cos al + j \left( \mathfrak{z} + \frac{z_0 z_1}{\mathfrak{z}} \right) \sin al} + j \frac{bB}{\mathfrak{z}} \sin ax, \quad (9)$$

gdzie  $\mathfrak{z} = \rho c$  — jednostkowa oporność charakterystyczna materiału pręta.

Przejdźmy teraz do rozpatrywania przetwornika magnetostrykcyjnego o typowym kształcie, przedstawionego na rys. 1. Jest to graniasto-

słup o podstawie prostokątnej (często kwadratowej) z podłużną szcześnią dla nawinięcia cewki.

W każdym punkcie przetwornika, zgodnie z równaniem (4), panuje natężenie pola magnetycznego



Rys. 1. Typowy kształt przetwornika prętowego.

$$H_1 = H + ks.$$

Całkowitą siłę magnetomotoryczną w rdzeniu, można — z pewnym przybliżeniem — wskutek idealizacji kształtów przetwornika — wyrazić całką

$$M = 2 \int_0^l H_1 dx.$$

Pod wpływem tej siły magnetomotorycznej w obwodzie magnetycznym powstanie taka indukcja  $B$ , jaką powstałaby, gdyby w rdzeniu na całej jego długości panowało równoważne średnie natężenie pola magnetycznego

$$H_{1\text{sr}} = \frac{1}{l} \int_0^l (H + ks) dx,$$

gdzie  $l$  — długość przetwornika.

Ponieważ  $H$  jest stałe na całej długości rdzenia, przeto

$$H_{1\text{sr}} = H + \frac{1}{l} \int_0^l ks dx.$$

Ale  $s = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ , więc

$$\frac{1}{l} \int_0^l ks dx = \frac{1}{l} \int_0^l k \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \frac{k}{l} \int_0^l d\xi = \frac{k}{l} \xi \Big|_0^l.$$

Stąd indukcja  $B$

$$B = \mu H + \frac{\mu k}{l} \xi \Big|_0^l. \quad (10)$$

Wartość  $\xi \Big|_0^l$  możemy wyliczyć z równania (9). Korzystając z tego, że  $\xi = \frac{\dot{\xi}}{j\omega}$  otrzymujemy po przeliczeniu wyrażenie:

$$\xi \Big|_0^l = \frac{bB}{j\omega} \cdot \frac{2(\cos al - 1) + j \frac{z_0 + z_l}{\mathfrak{z}} \sin al}{(z_0 + z_l) \cos al + j \left( \mathfrak{z} + \frac{z_0 z_l}{\mathfrak{z}} \right) \sin al}. \quad (11)$$

Wstawiając (11) do (10) otrzymujemy

$$B = \mu H + \frac{\mu k b B}{j l \omega F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al)}, \quad (12)$$

przy czym

$$F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al) = \frac{(z_0 + z_l) \cos al + j \left( \mathfrak{z} + \frac{z_0 z_l}{\mathfrak{z}} \right) \sin al}{2(\cos al - 1) + j \frac{z_0 + z_l}{\mathfrak{z}} \sin al}. \quad (13)$$

Z równania (12)

$$\frac{B}{\mu H} = \frac{1}{1 - \frac{kb\mu}{j l \omega F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al)}} \quad (14)$$

### Histeresa i prądy wirowe

Dla częstotliwości ponaddźwiękowych należy uwzględnić fakt, że wskutek zjawiska histerezy magnetycznej oraz działania prądów wirowych w materiale rdzenia stosunek  $\frac{B}{H}$  nie jest taki sam, jak w przypadku, gdy zjawiska te można by pominąć. Najwygodniej jest uwzględnić działanie tych zjawisk przez wprowadzenie zespolonej przenikalności magnetycznej

$$\mu = \mu_c \cdot g \cdot e^{-j\varphi}, \quad \varphi = \varphi_w + \varphi_h,$$

przy czym  $g$  jest współczynnikiem mniejszym od jedności, obrazującym zmniejszenie modułu  $\mu_c$  przez efekt prądów wirowych,  $\varphi_w$  kątem obrotu  $\mu$  na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wywołanym przez prądy wirowe,  $\varphi_h$  zaś analogicznym kątem wywołanym przez zjawisko histerezy magnetycznej. Jak wiadomo, poniżej pewnej częstotliwości granicznej, która jest funkcją wymiarów danego ciała ferromagnetycznego oraz parametrów materiału, z którego jest ono wykonane, można pominąć wpływ prądów wirowych, a więc przyjmując  $g=1$ ,  $\varphi_w=0$ .

### Elektryczny układ zastępczy przetwornika

W założeniu, że  $B$  jest sinusoidalne, napięcie na zaciskach cewki przetwornika jest

$$U = j \omega B S N \cdot 10^{-8},$$

gdzie  $N$  — ilość zwojów cewki przetwornika,

$S$  — przekrój ramienia przetwornika.

Natężenie pola magnetycznego  $H$ , wywołanego w przetworniku przez prąd sinusoidalny  $I$  płynący przez cewkę będzie:

$$H = \frac{0,4\pi I \cdot N}{l_n},$$

gdzie  $l_n$  — długość średniej drogi magnetycznej w rdzeniu.

Wobec powyższego możemy napisać

$$\frac{B}{\mu H} = \frac{U}{I} \cdot \frac{l_n}{0,4\pi N^2 S \cdot 10^{-8} \mu_c \cdot g \cdot e^{-j\varphi}}. \quad (15)$$

Stosunek  $\frac{U}{I}$  wyraża zastępczą impedancję elektryczną przetwornika.

Wstawiając (15) do (14) otrzymujemy

$$z_{\text{zast}} = \frac{1}{\frac{1}{z_e} + \frac{1}{z_m}}, \quad (16)$$

gdzie  $z_e$  i  $z_m$  równają się odpowiednio:

$$z_e = \frac{j\omega \cdot 0,4\pi N^2 S \cdot 10^{-8} \cdot \mu_c g \cdot e^{-j\varphi}}{l_n} = j\omega L g e^{-j\varphi}, \quad (17)$$

$$z_m = \omega L \frac{j\omega F(\beta, z_0, z_1, \alpha l)}{kb\mu_c}. \quad (18)$$

Wzór (17) można też napisać w postaci

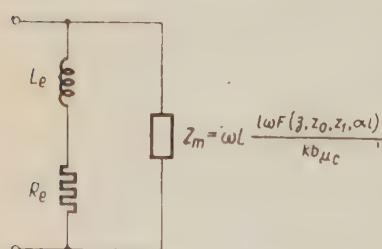
$$z_e = j\omega L_e + R_e, \quad (19)$$

gdzie

$$L_e = L \cdot g \cdot \cos \varphi, \quad (19a)$$

$$R_e = \omega L \cdot g \cdot \sin \varphi. \quad (19b)$$

Elektryczny układ zastępczy przetwornika można więc przedstawić za pomocą równoległego połączenia dwóch impedancji (rys. 2). Impedancja „elektryczna“  $z_e$  jest impedancją indukcyjną, jaką przedstawałby przetwornik, gdyby nie posiadał własności magnetostrykcyjnych. Składa się ona z reaktancji indukcyjności  $L_e$  oraz zastępczej szeregowej oporności strat  $R_e$ .



Rys. 2. Najogólniejszy układ zastępczy przetwornika.

Oddziaływanie mechaniczne przetwornika przedstawia w jego elektrycznym układzie zastępczym dołączona równolegle impedancja „mechaniczna“  $z_m$ . Jest ona dla dowolnej częstotliwości określona przez wzór (18) i występującą w nim funkcję falową  $F(\beta, z_0, z_1, \alpha l)$  daną wzorem (13).

Elektryczny układ zastępczy przetwornika dla częstotliwości rezonansu mechanicznego

Jeżeli  $z_0$  i  $z_l$  są rzeczywiste i małe w porównaniu z  $\mathfrak{z}$ , to w otoczeniu częstotliwości spełniających równanie

$$f_{\text{rez}} = (2n-1) \frac{c}{2l}, \quad (20)$$

gdzie  $f$  — częstotliwość napędzająca,

$n = 1, 2, 3, 4 \dots$ ,

czyli w otoczeniu częstotliwości rezonansu mechanicznego przetwornika — funkcja falowa może być przedstawiona jako

$$F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al) = \frac{z_0 + z_l}{4} - j \frac{\mathfrak{z}}{2} \operatorname{ctg} \frac{al}{2}. \quad (21)$$

W samym punkcie rezonansu znika część urojona we wzorze (21) i otrzymujemy

$$F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al) = \frac{z_0 + z_l}{4}. \quad (21a)$$

W praktycznych przypadkach  $z_0$  i  $z_l$  mają moduły małe w stosunku do  $\mathfrak{z}$ , jednak najczęściej nie są czysto rzeczywiste. Analiza funkcji  $F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al)$  wykazuje, że w tym przypadku częstotliwość rezonansu mechanicznego przesuwa się minimalnie, sama zaś funkcja przybiera na nowej częstotliwości rezonansowej wartość składowej rzeczywistej

$$F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, al) = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \{z_0 + z_l\}. \quad (22)$$

Jak wynika z powyższych rozważań, w samym punkcie rezonansu mechanicznego przetwornika impedancję  $z_m$  reprezentuje rzeczywista oporność  $R_m$ , która, jak to wynika ze wzorów (18) i (22), wynosi

$$R_m = \omega L \frac{l \omega \operatorname{Re} \{z_0 + z_l\}}{4kb\mu_c}. \quad (23)$$

Zwykły przetwornik pracuje na częstotliwości swego rezonansu podstawowego, a więc dla  $n=1$  we wzorze (20). W tym przypadku część urojoną wzoru (21) można wyrazić dla małych rozstrojeń od częstotliwości rezonansowej jako

$$-j \frac{\mathfrak{z}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) \approx j \frac{\mathfrak{z}}{2} \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_r}. \quad (24)$$

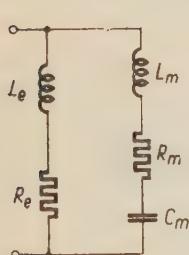
Impedancja bezstratnego elektrycznego szeregowego obwodu rezonansowego  $LC$  w okolicy rezonansu jest w przybliżeniu

$$j2\omega_r L \frac{1}{\omega_r} \quad \text{lub} \quad j \frac{2}{\omega_r C} \frac{\Delta\omega}{\omega_r}. \quad (25)$$

Stąd przez analogię, w najbliższym sąsiedztwie rezonansu mechanicznego, mamy

$$z_m = R_m + j \left( \omega L_m - \frac{1}{\omega C_m} \right), \quad (26)$$

przy czym, porównując wyrażenia (24) i (25) oraz (18) i (26), otrzymujemy



Rys. 3. Układ zastępczy przetwornika w okolicy rezonansu mechanicznego.

$$L_m = L \frac{\pi}{8} \frac{l\omega}{kb\mu_c}, \quad (27)$$

$$C_m = \frac{1}{\omega_r^2 L_m}. \quad (28)$$

W okolicy rezonansu mechanicznego elektryczny układ zastępczy przetwornika możemy więc przedstawić w sposób pokazany na rys. 3.

Wzory (27) i (28) oraz (26) są jednak słuszne jedynie w tym przypadku, gdy  $z_0$  i  $z_l$  są wielkościami rzeczywistymi. W przeciwnym razie składowa urojona  $F(\mathfrak{z}, z_0, z_l, \alpha)$  w okolicy rezonansu jest inna niż w wzorze (24), co powoduje, że  $L_m$  i  $C_m$  nie oddają wiernie zmian części urojonej impedancji  $z_m$ . Wpływ składowej urojonej  $z_0$  i  $z_l$  można pominąć dla bardzo małych wartości stosunku  $\frac{f_m \{z_0 + z_l\}}{\mathfrak{z}}$ . Przy wzroście tego stosunku nie jest on już pomijalny.

### 3. POMIARY MATERIAŁOWE NIKLU

#### Metoda pomiarów materiałowych

Jednym z materiałów wykazujących największy współczynnik magnetostrykcyjny jest nikiel; on też został użyty do pomiarów sprawdzających.

Do obliczenia wartości elementów zastępczego układu przetwornika konieczna jest znajomość występujących we wzorach parametrów. Na ogół można je wziąć z literatury, z wyjątkiem przenikalności  $\mu_c$  i współczynnika magnetostrykcyjnego  $b$ .

Przy pracy przetwornika zachodzą w nim niewielkie sinusoidalne zmiany natężenia pola magnetycznego  $H$  wokół pewnej ustalonej wartości natężenia pola magnetycznego polaryzującego  $H_0$ . Zarówno przenikalność przyrostowa  $\mu_c$ , jak przyrostowy współczynnik magnetostrykcyjny  $b$  zmieniają się w funkcji natężenia pola podkładu  $H_0$ , przy czym, ogólnie biorąc, przy wzroście  $H_0$  przenikalność  $\mu_c$  maleje, a zaś wzrasta.

Na parametry  $b$  i  $\mu_c$  ma także wpływ czystość użytego materiału oraz zastosowana obróbka termiczna.

Chociaż dane o magnetostrykcyjności niklu są podawane w dziełach traktujących o magnetyzmie [2], jednak przyrostowy współczynnik magnetostrykcyjności na ogół nie jest podawany. Ze względu na powyżej opisaną zmienność przyrostowego współczynnika magnetostrykcyjności w funkcji różnych parametrów, najlepiej jest po prostu zmierzyć jego wartość dla konkretnie użytego materiału.

Nieco mniej krytycznie, ale podobnie przedstawia się sytuacja przy określaniu wartości przenikalności przyrostowej niklu. Dane na ten temat są wprawdzie podawane w literaturze, jednak są skąpe i niedokładne.

Zauważmy, że współczynnik magnetostrykcyjności w wyprowadzonych wzorach występuje wszędzie w iloczynie  $kb\mu_c$ .

Wyrażenie

$$K = \sqrt{\frac{kb\mu_c}{Y}} = \sqrt{\frac{4\pi b^2 \mu_c}{Y}} \quad (29)$$

jest znane i spotykane w literaturze omawiającej toroidalny oscylator magnetostrykcyjny. Jest ono tam nazywane współczynnikiem sprężenia elektromechanicznego tego oscylatora. Parametry  $b$  i  $\mu_c$  są właśnie szukanymi przez nas parametrami przyrostowymi materiału.

Wartość współczynnika sprężenia elektromechanicznego toroidalnego przetwornika magnetostrykcyjnego można stosunkowo najłatwiej i najdokładniej znaleźć używając metody pomiarowej Rounda [9]. Istota metody Rounda polega na doprowadzeniu indukcyjności  $L_e$  do rezonansu z równolegle dołączoną pojemnością  $C_e$  w okolicy mechanicznego rezonansu przetwornika. W ten sposób powstaje układ dwóch obwodów rezonansowych sprężonych, których współczynnik sprężenia, dający się łatwo mierzyć metodą elektryczną, jest równy współczynnikiowi sprężenia elektromechanicznego.

Wielkość ta jest oczywiście pewną funkcją polaryzującego przetwornika natężenia pola magnetycznego  $H_0$ . Funkcja ta może być zjęta przez kolejne pomiary dla różnych wartości  $H_0$  i może być znalezione jej maksimum, odpowiadające najkorzystniejszym — z punktu widzenia przetwarzania energii — warunkom pracy przetwornika.

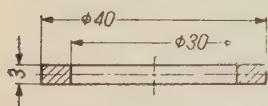
Przenikalność przyrostowa w funkcji  $H_0$  może być znaleziona pomiarowo w postaci zespolonej i rozbita na część rzeczywistą i urojoną. Stąd można znaleźć  $\mu_c$ , jeżeli znany jest współczynnik spadku przenikalności wskutek prądów wirowych.

Znając  $K$  i  $\mu_c$  łatwo znajdziemy  $b$  ze wzoru (29), ponieważ wartość modułu sprężystości  $Y$  jest dla niklu dokładnie znana i stała.

## Przebieg pomiarów materiałowych i wyniki

Pomiary własności materiałowych użytego niklu przeprowadzono za pomocą specjalnie wykonanego małego torroidu pomiarowego.

Nikiel użyto w postaci blachy o grubości 0,125 mm dla wyeliminowania strat na prądy wirowe. Z blachy tej wycięto torroidy o zewnętrznej średnicy 40 mm; wyżarzono je następnie przez 4 godziny w atmosferze wodorowej przy temperaturze 1070 stopni Celsjusza. Po oczyszczeniu blaszki klejono specjalnym klejem organicznym, otrzymując przetwor-

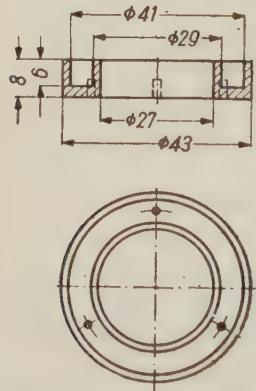


Rys. 4. Torroid pomiarowy.

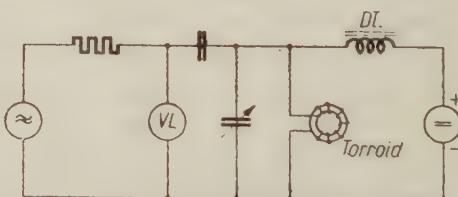
nik toroidalny o rozmiarach jak na rys. 4 i częstotliwości rezonansu mechanicznego ok. 45 kHz. Toroid został dla zmniejszenia tłumienia mechanicznego umieszczony w specjalnie wydrążonym krążku pleksiglasowym, którego rozmiary podano na rys. 5, przy czym opierał się tylko na trzech wbitych w dno wydrążonego kanału cienkich przecikach miedzia-

nych o zaokrąglonych końcach. Na krążek nawinięto 160 zwojów izolowanego drutu miedzianego.

Pomiary współczynnika sprężenia elektromechanicznego w funkcji natężenia pola polaryzującego  $H_0$  przeprowadzono metodą Rounda w ukła-



Rys. 5. Krążek pleksiglasowy.



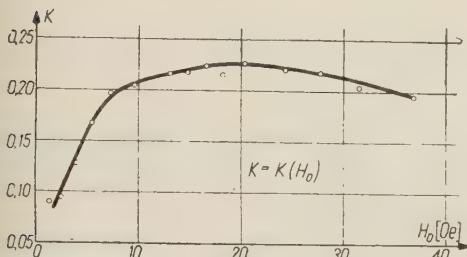
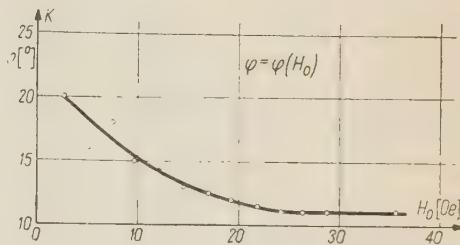
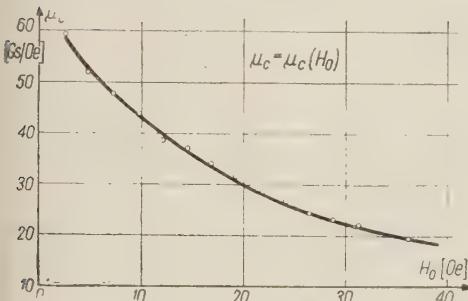
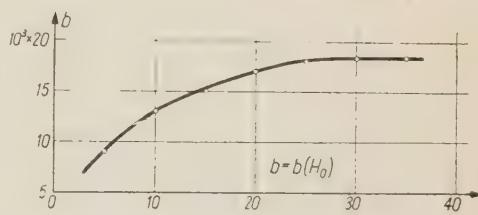
Rys. 6. Układ do pomiarów metodą Rounda

dzie pomiarowym podanym na rys. 6. Uzyskano na tej podstawie krzywą  $K = K(H_0)$  podana na rys. 7. Ustalono, że

$$K_{\max} = 0,225 \quad \text{dla} \quad H_0 = 20 \text{ Oe.}$$

Dla tego samego torroidu zmierzono następnie zespolone wartości  $z_e = z_e(H_0)$  dla  $f = 20$  kc/s, skąd znaleziono  $\varphi = q(H_0)$  dla tej częstotliwości. Wykreślona krzywą podano na rys. 8. Stwierdzono, że powyżej  $H_0 = 20$  Oe,  $\varphi = \text{const}$  mimo dalszej zmiany  $\mu$  w funkcji  $H_0$ . Ponieważ wiadomo, że  $q_{\varphi}$

rośnie z wzrostem  $\mu$ , widać, że dla  $H_0 > 20$  Oe jest  $\varphi_w \approx 0$ . Oznacza to zanik wpływu prądów wirowych dla  $H > 20$  Oe przy  $f = 20$  kHz. Można więc przyjąć, że dla użytej blachy niklowej przy  $H_0 = 20$  Oe,  $\varphi = \varphi_h$  oraz  $g = 1$ . Także dla  $H_0 < 20$  Oe, a więc większych  $\mu$  można przyjąć z pewnym przybliżeniem  $g \approx 1$ , ponieważ  $g$  nie maleje zbyt gwałtownie przy malejącym  $H_0$ .

Rys. 7.  $K = K(H_0)$ .Rys. 8.  $\varphi = \varphi(H_0)$ .Rys. 9.  $\mu_c = \mu_c(H_0)$ .Rys. 10.  $b = b(H_0)$ .

Siad z funkcji  $z_e = z_e(H_0)$  możemy obliczyć łatwo  $\mu_c = \mu_c(H_0)$ , jak to przedstawia rys. 9. Dla  $H_0 < 20$  Oe wartości  $\mu_c$  są przybliżone.

Z tej krzywej oraz z krzywej  $K = K(H_0)$  znajdujemy na podstawie wzoru (29) krzywą  $b = b(H_0)$ , którą podano na rys. 10.

Wszystkie pomiary wykonano przy amplitudzie zmiennego natężenia pola magnetycznego w torroidzie  $H \approx 300$  mOe. Układ pomiaru  $z_e = z_e(H_0)$  podano na rys. 12.

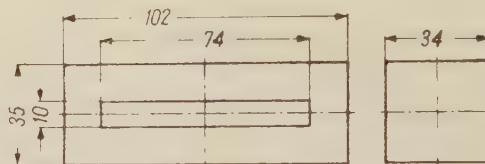
#### 4. OBLCZENIE WARTOŚCI ELEMENTÓW ELEKTRYCZNEGO UKŁADU ZASTĘPCZEGO PRZETWORNIKA PRĘTOWEGO

Wykonanie przetwornika i ustalenie warunków pracy

Znając parametry materiałowe użytego niklu, zaprojektowano przetwornik prętowy na częstotliwość rezonansu mechanicznego  $f = 21$  kHz metodą podaną przez Campa [4].

Z tej samej co poprzednio blachy niklowej wycięto prostokątne blaszki, które po takiej samej jak dla torroidu obróbce termicznej sklejono tym samym klejem, uzyskując przetwornik prętowy o rozmiarach jak na rys. 11.

Na każde ramię przetwornika nawinięto bardzo luźno po 40 zwojów grubego drutu miedzianego w izolacji igielitowej.



Rys. 11. Wymiary przetwornika prętowego.

Obrano dla przetwornika najkorzystniejsze namagnesowanie wstępne  $H_0 = 20$  Oe. Dla takiego  $H_0$  znalezione z wykresów na rys. 9, 10 i 8

$$b = 1,69 \cdot 10^4,$$

$$\mu_c = 30,$$

$$\varphi_{\text{str}} = 12^\circ.$$

### Obliczenie elementów układu zastępczego dla różnych obciążen przetwornika

Posługując się wyprowadzonymi wzorami, obliczono dla wyżej wymienionego przetwornika przewidywane wartości elementów elektrycznego układu zastępczego dla trzech przypadków:

- I. praca w powietrzu (przetwornik nieobciążony),
- II. jednostronne obciążenie przetwornika wodą,
- III. obustronne obciążenie przetwornika wodą.

### Obliczenie impedancji gałęzi elektrycznej

Na wstępnie obliczono impedancję  $z_e$ , która jest jednakowa dla wszystkich trzech przypadków.

Posługując się wzorem (17) obliczono z rozmiarów geometrycznych

$$L = 0,35 \text{ mH}, \text{ skąd } \omega L = 46 \Omega.$$

Następnie z wzorów (19a) i (19b)

$$\omega L_e = 45 \Omega, \quad R_e = 9,6 \Omega, \quad L_e = 0,34 \text{ mH}.$$

### Obliczenie impedancji gałęzi mechanicznej

#### I. Przetwornik nieobciążony

Znaleziono dla niklu z tablic [11];  $\beta = 430 \cdot 10^4$ . Stąd za pomocą wzoru (27) i (29) obliczono

$$L_m = 8,2 \text{ mH}; \quad C_m = 7000 \text{ pF}.$$

## II. Przetwornik obciążony jednostronnie wodą

Dla obliczenia jednostkowej impedancji akustycznej na końcowej płaszczyźnie przetwornika przy obciążeniu jej wodą założono działanie tej płaszczyzny jako tła o równoważnym promieniu  $r_0 = 1,8 \text{ cm}$ , drgającego w nieograniczonym ośrodku wodnym. Z tablic [11] mamy dla wody:

$$\rho_w = 1, \quad C_w = 14,4 \cdot 10^4.$$

Przy częstotliwości  $f = 21 \text{ kHz}$  stała falowa w wodzie

$$a = 0,95, \quad \text{stąd} \quad ar_0 = 1,65.$$

Z wykresów podanych w [11] znaleziono dla  $ar_0 = 1,65$  — w przypadku tła drgającego —

$$\frac{R_w}{\rho_w C_w} = 0,9 \quad -\frac{x_w}{\rho_w C_w} = 0,65,$$

gdzie

$$z_w = R_w + jx_w.$$

Ponieważ dla jednostronnego obciążenia przetwornika wodą jest:  $z_0 = z_w$ ,  $z_l = 0$ , przeto

$$\Re\{z_0 + z_l\} = \Re\{z_w\} = R_w = 13 \cdot 10^4.$$

Wstawiając tę wartość do wzoru [23] otrzymujemy:

$$R_m = 18,5 \Omega.$$

## III. Przetwornik obciążony dwustronnie wodą

Widać od razu, że dla tego obciążenia  $z_0 = z_l = z_w$ . Wobec tego

$$\Re\{z_0 + z_l\} = \Re\{2z_w\} = 2R_w,$$

skąd oczywiście

$$R_m = 37 \Omega.$$

## 5. POMIARY IMPEDANCJI PRZETWORNIKA

Metoda wyznaczania elementów elektrycznego układu zastępczego przetwornika z pomiarów impedancji

Wykonany przetwornik prętowy poddano pomiarom sprawdzającym. W tym celu zawieszano go kolejno w powietrzu, w wodzie oraz jednym końcem w wodzie, a drugim w powietrzu. We wszystkich trzech przypadkach spolaryzowano przetwornik stałym polem magnetycznym o natężeniu  $H_0 = 20 \text{ Oe}$  i przy amplitudzie natężenia pola zmiennego  $H = 300 \text{ mOe}$  pomierzono impedancję elektryczną na zaciskach cewki przetwornika w funkcji częstotliwości. Pomiary wykonano przy użyciu generatora o zakresie częstotliwości  $0 - 40 \text{ kc/s}$  oraz mostka impedancji,

pozwalającego na pomiar modułu i kąta fazowego impedancji. Układ pomiarowy i sposób polaryzacji podaje rys. 12.

Wyniki pomiarów w postaci wykresów impedancji na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dla wszystkich trzech przypadków podano na

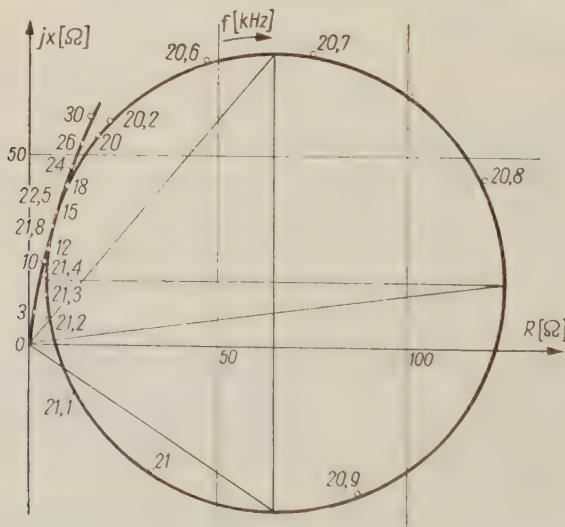


Rys. 12. Układ pomiarów impedancji przetwornika.

rys. 13, 14 i 15. Linia podana na wykresie jest połączeniem końców wektorów impedancji, jaką przedstawia przetwornik przy kolejno po sobie następujących częstotliwościach.

W celu znalezienia z wykresu impedancji wartości elementów elektrycznego zastępczego układu przetwornika zastosowano metodę analizy wykresu, używaną przez Butterwortha i Smitha oraz Nødtvedta.

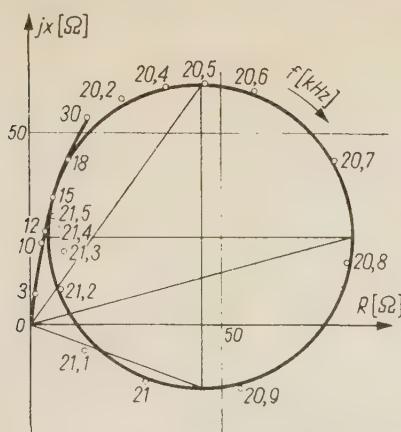
Metodą inwersji [7] znaleziono wykreslinie punkt rezonansu gałęzi mechanicznej oraz dwa punkty po obu jego stronach — częstotliwości  $f_1$



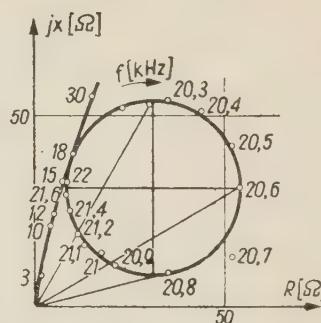
Rys. 13. Przetwornik nieobciążony. Wykres impedancji.

i  $f_2$ , przy których reaktancja gałęzi mechanicznej równa jest liczbowo oporności gałęzi mechanicznej  $R_m$ . Stąd dobroć układu rezonansowego gałęzi mechanicznej:

$$Q_m = \frac{f_r}{f_2 - f_1}. \quad (30)$$



Rys. 14. Przetwornik obciążony jednostronnie wodą. Wykres impedancji.

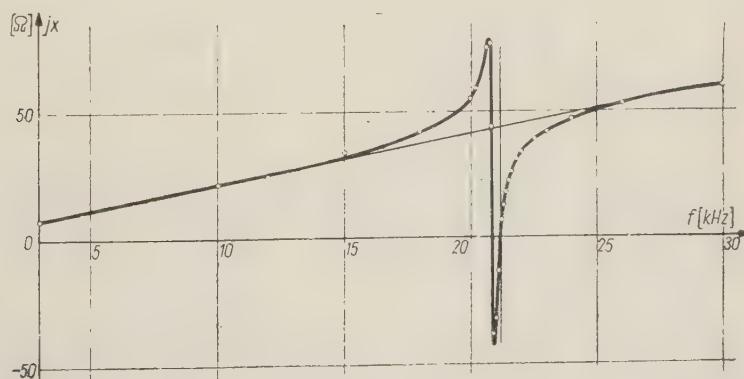


Rys. 15. Przetwornik obciążony dwustronnie wodą. Wykres impedancji.

Na rysunkach 16 i 17 wykreślono funkcje (pomierzone)  $\omega L_e = \omega L_e(f)$  oraz  $R_e = R_e(f)$  dla przetwornika nieobciążonego. Metodą interpolacji znaleziono wartości  $\omega_r L_e$  oraz  $R_e$  dla częstotliwości rezonansu mechanicznego. Stąd obliczono

$$z_e = \sqrt{(\omega_r L_e)^2 + R_e^2}. \quad (31)$$

Z każdego wykresu znaleziono następnie średnicę koła impedancji  $D$ , wyrażoną w omach.



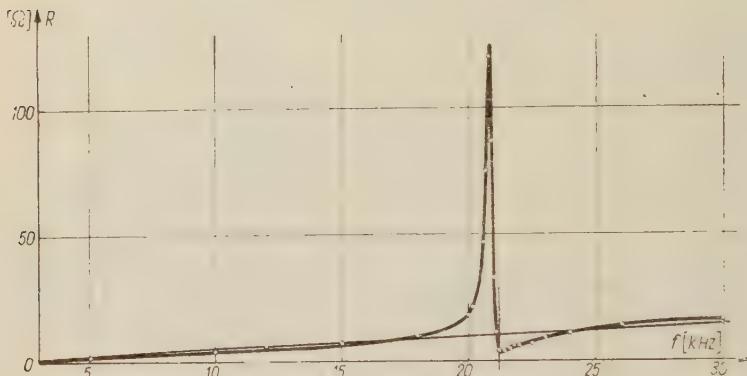
Rys. 16. Reaktancja przetwornika w funkcji częstotliwości.

Mając te dane, łatwo znaleziono na podstawie [7]

$$R_m = \frac{z_e^2}{D} - R_e, \quad (32)$$

$$L_m = \frac{Q_m R_m}{\omega_r} \quad (33)$$

$$C_m = \frac{1}{\omega_r^2 L_m} \quad (34)$$



Rys. 17. Oporność przetwornika w funkcji częstotliwości.

Elementy układu zastępczego wyznaczone z pomiarów impedancji

#### Gałąź elektryczna

Z wykresu przetwornika nieobciążonego znaleziono  $f_r = 21.16 \text{ kHz}$ . Z rysunków 16 i 17 dla tej częstotliwości jest

$$\omega L_e = 43.5 \Omega, \quad L_e = 0.327 \text{ mH}, \\ R_e = 9.5 \Omega;$$

stąd, zgodnie z (31)

$$z_e = 44.5 \Omega.$$

Ponieważ przy obciążeniu przetwornika częstotliwość rezonansu mechanicznego prawie się nie zmienia, przyjmiemy tę wartość  $z_e$  dla wszystkich trzech przypadków.

#### Gałąź mechaniczna

Analizę wykresów impedancji dla otrzymania elementów gałęzi mechanicznej przeprowadzamy kolejno dla wszystkich trzech przypadków.

#### I. Przetwornik w powietrzu

Z wykresu  $f_1 = 21.12 \text{ kHz}$ ,  
 $f_2 = 21.19 \text{ kHz}$ ,  
 $D = 121$ .

Stąd, po przeliczeniu według (30), (32), (33) i (34) otrzymujemy

$$R_m = 6,9 \Omega, \quad L_m = 15,7, \\ Q_m = 302, \quad C_m = 3530 \text{ pF}.$$

### II. Przetwornik obciążony jednostronnie wodą

Z wykresu:  $f_1 = 21,08 \text{ kHz}$ ,  
 $f_2 = 21,22 \text{ kHz}$ ,  
 $D = 80$ .

Obliczenia dają

$$R_m = 15,2 \Omega, \quad L_m = 17,2 \text{ mH}, \\ Q_m = 151 \quad C_m = 3280 \text{ pF}.$$

### III. Przetwornik obciążony dwustronnie wodą

Z wykresu:  $f_1 = 20,75 \text{ kHz}$ ,  
 $f_2 = 21,2 \text{ kHz}$ ,  
 $D = 46$ .

Obliczenia dają

$$R_m = 33,5 \Omega, \quad L_m = 15,2 \text{ mH}, \\ Q_m = 60, \quad C_m = 3880 \text{ pF}.$$

## 6. PORÓWNANIE WIELKOŚCI OBLCZONYCH ZE ZMIERZONYMI

Wielkości obliczone teoretycznie i otrzymane poprzez analizę wykresów impedancji porównano w poniższej tablicy:

Tabela wartości elementów zastępczego układu przetwornika

|                   | Przetwornik nieobciążony |         | Obciążony jednostr. wodą |         | Obciążony dwustronnie wodą |         |
|-------------------|--------------------------|---------|--------------------------|---------|----------------------------|---------|
|                   | oblicz.                  | zmierz. | oblicz.                  | zmierz. | oblicz.                    | zmierz. |
| $R_m (\Omega)$    | —                        | 6,9     | 18,5                     | 15,2    | 37                         | 33,5    |
| $L_m (\text{mH})$ | 8,2                      | 15,7    | —                        | 17,2    | —                          | 15,2    |
| $C_m (\text{pF})$ | 7000                     | 3530    | —                        | 3280    | —                          | 3880    |

Z porównania wynika dobra zgodność między wynikami otrzymanymi teoretycznie i pomiarowo. Rozbieżności szczególnie dla reaktancji  $L_m$  i  $C_m$  są wynikiem pewnej idealizacji kształtów przetwornika oraz błędów pomiarowych.

Osobnym zagadnieniem jest sprawa udziału w ogólnym oporze „me-

chanicznym" obciążonego przetwornika oporności strat w samym przetworniku (na tarcie wewnętrzne itp.). Jest rzeczą już stwierdzoną, że oporność ta nie jest równa dodanej w szereg z opornością promieniowania oporności „mechanicznej" przetwornika nieobciążonego. Sprawa ta pozostaje dotąd otwarta, chociaż wydaje się, że ze względu na możliwość ustalenia warunków pracy przetwornika odpowiadających jego maksymalnej sprawności powinna być stanowczo dokładnie zbadana.

Zakład Badania Drgan  
IPPT

#### WYKAZ LITERATURY

1. Bergmann L.: *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik* — Stuttgart, 1954.
2. Bozorth R. H.: *Ferromagnetism* — New York, 1951.
3. Butterworth S. and Smith F. D.: *The equivalent circuit of the magnetostriction oscillator* — Proc. of the Phys. Soc. of London 43, 166, 1931.
4. Camp L.: *Laminations design for magnetostrictive underwater electroacoustic transducers* — JASA, 20, 5, 1948.
5. Kinsler L. E. and Frey G.: *Fundamentals of acoustics* — New York, 1950.
6. Mason W. P.: *Electromechanical transducers and wave filters* — New York, 1942.
7. Nødtvedt H.: *Some remarks on the analysis of the magnetostrictive transducer* — Acustica, 4, 4, 1954.
8. Pierce G. W.: *Magnetostriction oscillators* — Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences 63, I, 1928.
9. Round H. J.: *Magnetostriction transducer measurements* — Wireless Engineer and Experimental Wireless, 29, 4, 1952.
10. Schonfeld H.: *Das Ersatzschaltbild des ferromagnetostrictiven Wandlers* — Frequenz, 5, 11—12, 1951.
11. Żyszkowski Z.: *Podstawy elektroakustyki* — Warszawa, 1953.

#### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЗАМЕЩАЮЩЕЙ НАГРУЖЕННЫЙ СТЕРЖНЕВОЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ

#### Резюме

Магнитострикционные преобразователи имеют широкое применение в ультразвуковой технике, в особенности в области активных применений ультразвуков. В последнее время применяются почти исключительно стержневые преобразователи. Стержневой преобразователь, в отличие от торOIDального, с акустической точки зрения является системой с распределенными постоянными.

Современная литература не дает формул на зависимость электрического входного импеданса преобразователя от акустической нагрузки лучепускающих поверхностей. Немногие фрагментарные попытки в этом направлении в общем упрощают проблему, замещая стержневой преобразователь некоторым эквивалентным вибратором и сосредоточенными постоянными.

Настоящая работа обсуждает вопрос довольно суммарно с более общей точки зрения. Преобразователь обсуждается как элемент с распределенными постоян-

ными. Введены основные волновые уравнения. Учитывая вытекающие из явления магнитострикции зависимости, найдено воздействие акустических процессов на магнитные, и затем на электрические. Воздействие это выражено формулами, по которым определена электрическая заместительная система стержневого преобразователя при любой нагрузке и любой частоте питания. Для нормальных условий работы, т. е. для частоты механического резонанса преобразователя и для небольшой акустической нагрузки, выведены упрощенные формулы.

В следующей части работы проверена верность выведенных формул. После исполнения измерений магнитострикционного коэффициента наличных никелевых листов — из этих листов был исполнен пробный стержневой преобразователь. Пользуясь выведенными формулами были рассчитаны для него значения элементов заместительной электрической системы при различных нагрузках, предполагая работу на частоте механического резонанса. Затем, при постепенной нагрузке преобразователя те же значения были измерены. Сравнение измеренных и рассчитанных результатов обнаружило их большое соответствие.

#### CALCULATION OF ELECTRIC EQUIVALENT CIRCUIT OF LOADED BAR-TYPE MAGNETOSTRICTIVE TRANSDUCER

##### Summary

The magnetostrictive transducers have found a wide application in the ultrasonic technique and in particular in the active application of ultrasounds. Lately the bar-type transducers are used almost exclusively. From the acoustic viewpoint the bar-type transducer in distinction to the toroidal transducer represents a circuit with distributed constants.

Up to the present there is a deficiency in the literature of the formulae interrelating the electric input impedance with the acoustic loading of the radiating surfaces. Few tests carried out in this respect are of fragmentary nature and in general they oversimplify the problem by the substitution of the bar-type transducer with a certain equivalent oscillator with the lumped constants.

The presented work deals with the problem in most general sense. The transformer is considered as an element with distributed constants. The fundamental wave equations are introduced. Taking into account the dependencies deriving from the magnetostriction phenomenon the influence of the acoustic characteristics to those of the magnetic and then the electric was found out.

This influence was described by the equations from which the electric equivalent circuit for the bar-type transducer for anyone load and anyone motive frequency has been developed. For the normal working conditions i.e. for the frequencies of the mechanical resonance of the transducer and small acoustic loading the simplified formulae are derived.

Further on the rightness of the worked out formulae was testified.

After the measurements of the magnetostrictive coefficient of the nickel sheets were made the experimental bar-type transducer was produced out of these sheets.

Applying the derived formulae the values of the elements of the electric equivalent circuit at the various loadings by the assumption that the work is based on the mechanical resonance frequency has been calculated for this transducer. The same values have been measured by successively loading of the transducer good agreement with the evaluated results was found out.



621.396.677.75:621.317.35:621.3.015.3

S. KULIŃSKI

## Czas narastania i przepięcia przebiegów nieustalonych w falowodach

*Rękopis dostarczono 15. 5 1958*

Rozpatrzone stany nieustalone wszystkich składowych natężeń pól elektrycznego i magnetycznego dowolnych rodzajów, powstających w falowodzie o ścianach doskonale przewodzących i dowolnym przekroju. W szczególności rozpatrzone dokładnie czasy narastania poszczególnych składowych oraz występujące przepięcia. Przy dość ogólnych i praktycznie ważnych założeniach wykazano, że:

- 1) czasy narastania poszczególnych składowych pola elektromagnetycznego różnią się nieistotnie dla danego falowodu i przy tym samym stosunku częstotliwości pracy do częstotliwości granicznej falowodu;
- 2) przepięcia są w przybliżeniu jednakowe dla wszystkich rodzajów i składowych pola w falowodzie i wynoszą około 17% stanu ustalonego;
- 3) od chwili nadejścia fali głównej (tzn. fali rozchodzącej się z szybkością grupową  $V_g$ ) zmiany amplitudy wszystkich składowych pola mają taki sam przebieg;
- 4) czas narastania jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości falowodu.

### WPROWADZENIE

Rozważamy pole elektromagnetyczne wzbudzane przez dipol umieszczony w podwójnie nieskończonym falowodzie o ścianach doskonale przewodzących i dowolnym przekroju. Obieramy układ współrzędnych tak, że oś  $z$  jest równoległa do ścianek falowodu. Zakładamy, że dipol elektryczny umieszczony w punkcie  $(x_0 y_0 z_0)$  zostaje wzbudzony w chwili  $t=0$ , przy czym moment dipola jest

$$\vec{M} = \vec{M}1(t) (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t, \quad (1)$$

gdzie  $1(t)$  — funkcja jednostkowa Heaviside'a.

Czynnik  $1 - e^{-\alpha t}$  został wprowadzony celem zapewnienia fizycznie możliwych warunków na czole fali.

Ścisłe rozwiążanie tak postawionego zagadnienia podał Gajewski [7]. W pracy niniejszej interesować się będziemy przede wszystkim zmianami zachodzącymi w pobliżu nadejścia fali głównej. Zagadnienie to rozpatrywano między innymi w [3], [5], [7], [8], [9], [10].

Celem pracy jest znalezienie i porównanie czasów narastania oraz przepięć amplitudy fali głównej wszystkich składowych pola elektromagnetycznego dla różnych rodzajów pobudzania falowodu. Znajomość tych wielkości ma duże znaczenie między innymi w technice radiolokacyjnej używającej bardzo krótkich impulsów o możliwie stromych zboczach. Ponieważ impulsy te są przesyłane najczęściej przez falowody, więc znajomość czasu narastania pozwoli określić czy i w jakim stopniu falowód wpływa na stromość zboczy impulsów. Dokładniej tym zagadnieniem zajmował się Gajewski [7].

1. Wyprowadzenie wzorów na składowe pola elektromagnetycznego w falowodzie.

W wyprowadzeniu tym oprzemy się na pracy [7]. Założymy w (1), że  $\varrho$  jest dostatecznie duże tak, że możemy napisać

$$\vec{M} = \vec{M} 1(t) \sin \omega_0 t \quad (2)$$

lub w postaci zespolonej

$$\vec{M} = \vec{M} 1(t) \exp \left[ -i \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (3)$$

gdzie  $\omega_0$  jest częstotliwością kątową drgań dipola.

Pola  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$  promieniowane przez taki dipol dają się przedstawić w postaci:

$$\vec{E} = \sum_m (\vec{E}_\perp^{(m)} + \vec{n} E_z^{(m)}), \quad (4)$$

$$\vec{H} = \sum_m (\vec{H}_\perp^{(m)} + \vec{n} H_z^{(m)}), \quad (5)$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż osi  $z$ . Dalej mamy [4]

$$E_z^{(m)} = (P_m u_z^{(m)} - k_m^2 R_m u_z^{(m)}) \varphi_m, \quad (6a)$$

$$H_z^{(m)} = -\frac{1}{c} Q_m U_t^{(m)} \Phi_m, \quad (6b)$$

$$\vec{E}_\perp^{(m)} = \frac{1}{k_m^2} (P_m u_{zz}^{(m)} - k_m^2 R_m u_z^{(m)}) \vec{\text{grad}}_2 \varphi_m - \frac{1}{K_m^2 c} \vec{Q}_m U_{tt} \vec{n} \times \vec{\text{grad}}_2 \Phi_m. \quad (6c)$$

$$\vec{H}_\perp^{(m)} = -\frac{1}{K_m^2 c} \vec{Q}_m U_{tz} \vec{\text{grad}}_2 \Phi_m - \frac{1}{k_m^2 c} (P_m u_{tz}^{(m)} - k_m^2 R_m u_t^{(m)}) \vec{n} \times \vec{\text{grad}}_2 \varphi_m. \quad (6d)$$

We wzorach tych  $k_m$  i  $K_m$  są wartościami własnymi, a  $\varphi_m$  i  $\Phi_m$  znormalizowanymi funkcjami własnymi zagadnienia:  $f_{xx} + f_{yy} + \kappa^2 f = 0$  w przekroju falowodu, przy czym  $k_m$  i  $\varphi_m$  odpowiadają warunkowi brzegowemu  $f|_C = 0$ ;  $K_m$  i  $\Phi_m$  warunkowi:  $\frac{\partial f}{\partial \nu}|_C = 0$ ; gdzie  $C$  krzywa ograniczająca przekrój poprzeczny falowodu,  $\nu$  — normalna zewnętrzna do  $C$ . Indeksy  $u$  dołu oznaczają różniczkowanie, np.  $u_t^{(m)} = \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t}$ .

$P_m$ ,  $Q_m$  i  $R_m$  dane są wzorami:

$$P_m = i 2\pi \vec{M} \operatorname{grad}_2 \varphi_m(x_0 y_0), \quad (7)$$

$$Q_m = i 2\pi [\vec{M} \times \operatorname{grad}_2 \Phi_m(x_0 y_0)] \vec{n}, \quad (8)$$

$$R_m = -i 2\pi M n \varphi_m(x_0 y_0), \quad (9)$$

$$\operatorname{grad}_2 = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}. \quad (10)$$

Funkcja  $u^{(m)}$  dana jest przez

$$u^{(m)} = -ic \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\omega^2 - \omega_m^2)^{1/2}} \exp \left\{ -i \left[ \omega t - \frac{z}{c} (\omega^2 - \omega_m^2)^{1/2} \right] \right\} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0}, \quad (11)$$

gdzie  $\omega_m = ck_m$  odpowiada częstotliwości granicznej dla rodzaju  $TM$ . Aby otrzymać  $U^{(m)}$ , należy do wzoru (10) podstawić zamiast  $\omega_m$  wielkość  $\Omega_m = ck_m$  odpowiadającą częstotliwości granicznej dla rodzaju  $TE$ , gdzie  $c$  jest szybkością światła w próżni. Droga całkowania  $L$  przebiega w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\omega$  od  $+\infty$  do  $-\infty$ .

Wzory ścisłe na funkcje  $u^{(m)}$  i jej pochodne zostały uzyskane przez Rubinowicza [10] w postaci zbieżnych szeregów funkcji Bessela, a więc nie zawsze są one dogodne do wyliczeń. Skorzystamy zatem ze wzorów asymptotycznych ważnych dla obszaru dalekiego od czoła fali, a uzyskanych metodą najszybszego spadku [7] [9]. Mamy wtedy

$$\left. \begin{aligned} u^{(m)} &= \frac{-ic}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}} \left[ \frac{1 - \beta^2}{\beta} + \frac{\omega_0^2 - \omega_m^2}{\omega_m} (J_1 - J_2) + S_0(t) \right], \\ u_t^{(m)} &= \frac{-\omega_0 c}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}}{\omega_0} (J_1 + J_2) + S_0(t) \right], \\ u_{tt}^{(m)} &= \frac{ic \omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}} \left[ \frac{\omega_m}{\beta} + \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\omega_0^2 - \omega_m^2}{\omega_0^2} (J_1 - J_2) + S_0(t) \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_z^{(m)} &= J_1 + J_2 + S_0(t), \\ u_{zz}^{(m)} &= \frac{i\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}}{c} \left[ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\omega_m}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}} (J_1 - J_2) + S_0(t) \right], \\ u_{zt}^{(m)} &= -i\omega_0 \left[ \frac{\omega_m}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (J_1 - J_2) + S_0(t) \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gdzie dla  $\omega_0 > \omega_m$  jest

$$S_0(t) = 1(t - t_0) \exp \left[ -i \left( \omega_0 t - \frac{z}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2} \right) \right], \quad (13)$$

$$J_1 = -\frac{d}{|d|} \frac{\varepsilon(|d|)}{\sqrt{2}} \exp -i \left( \eta + \frac{1}{2} \pi d^2 + \frac{1}{4} \pi \right). \quad (14)$$

$$J_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\eta}} \frac{\exp i \left( \eta - \frac{1}{4} \pi \right)}{1 + \frac{\omega_0}{\omega_m} \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (15)$$

$$t_0 = \frac{z}{V_{\text{gr}}} = \frac{z}{c \left[ 1 - \left( \frac{\omega_m}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (16)$$

$$\beta = \frac{z}{ct}; \quad \beta_0 = \frac{z}{ct_0} \quad (17)$$

$$\eta = \omega_m t (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (18)$$

$$d = -\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \left[ 1 - \frac{\omega_0}{\omega_m} \sqrt{1 - \beta^2} \right], \quad (19)$$

$$V_{\text{gr}} = c \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_m}{\omega_0} \right)^2} - \text{szybkość grupowa},$$

$$\varepsilon(x) = \int_x^\infty \exp \left( i \frac{1}{2} \pi y^2 \right) dy, \quad (20)$$

$\varepsilon(x)$  oznacza całkę Fresnela, przy czym mamy

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} (1 + i) - F(x) = \left[ \frac{1}{2} - C(x) \right] + i \left[ \frac{1}{2} - S(x) \right], \quad (21)$$

gdzie

$$F(x) = \int_0^x \exp \left( i \frac{1}{2} \pi y^2 \right) dy \quad C(x) + iS(x) = -F(-x) \quad (22)$$

oraz

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi y^2\right) dy, \quad (23)$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi y^2\right) dy$$

są stabularyzowanymi funkcjami Fresnela.

Dla dużych  $x > 0$  mamy następujące wyrażenia asymptotyczne:

$$S(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x} \cos \frac{1}{2}\pi x^2 + 0\left(\frac{1}{\pi^2 x^3}\right), \quad (24)$$

$$C(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x} \sin \frac{1}{2}\pi x^2 + 0\left(\frac{1}{\pi^2 x^3}\right).$$

Dla  $x \geq 3$  dokładność przybliżeń uwzględniających dwa pierwsze członu jest lepsza od 1%.

Podstawiając (21) i (24) do (14) otrzymamy dla  $d \geq 3$

$$J_1 = -\frac{\exp -i\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{2\pi d}} = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\eta}} \frac{\exp -i\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right)}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (25)$$

a więc wyrażenie zbliżone w swej postaci do  $J_2$ .

Podstawiając wyrażenia na  $J_1$  i  $J_2$  do wzorów (12) nietrudno wykazać, że dla  $t \rightarrow \infty$  znikają członu zawierającego  $J_1$  i  $J_2$ . Określają one zatem stan przejściowy, podczas gdy członu  $S_0(t)$  dają stan ustalony. Zwracam przy tym uwagę, że sens fizyczny posiadają tylko części rzeczywiste funkcji (12).

#### ANALIZA FUNKCJI $u^{(m)}$ I JEJ POCHODNYCH W POBLIŻU NADEJŚCIA FALI GŁÓWNEJ

Rozważania nasze zaczniemy od chwili  $t_0$  nadejścia fali głównej. Analizować będziemy amplitudy względne, tzn. wyrażenia w nawiasach wzorów (12). Wykażemy najpierw, że dla  $t = t_0$  amplitudy względne wszystkich funkcji (12) są jednakowe. Otóż dla  $t = t_0$  we wszystkich wzorach (12) współczynniki przy  $(J_1 - J_2)$  oraz  $(J_1 + J_2)$  równe są jedności. Aby to wykazać, wystarczy skorzystać ze wzoru

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{b_m^2 - 1}}{b_m}, \quad \text{gdzie } b_m = \frac{\omega_0}{\omega_m}, \quad (26)$$

skąd

$$b_m^2(1-\beta_0^2)=1 \quad b_m = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}.$$

I tak np. dla funkcji  $u^{(m)}$  jest

$$\frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \frac{\sqrt{\omega_0^2-\omega_m^2}}{\omega_m} = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \sqrt{b_m^2-1} = 1.$$

Dla innych funkcji (12) dowód jest analogiczny.

Należy więc jeszcze udowodnić, że amplitudy wyrażeń  $\mathbf{Im}(J_1 - J_2)$  i  $\mathbf{Re}(J_1 + J_2)$  są sobie równe. Mamy bowiem

$$J_1 = -\frac{d}{|d|} \frac{\varepsilon(|d|)}{\sqrt{2}} \exp -i\left(\eta + \frac{1}{2}\pi d^2 + \frac{1}{4}\pi\right) = a_1 \exp -i(\eta - \varphi_1),$$

$$J_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\eta}} \frac{\exp i\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + b_m \sqrt{1-\beta^2}} = a_2 \exp i\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right),$$

skąd

$$\mathbf{Re}(J_1 + J_2) = a_1 \cos(\eta - \varphi_1) + a_2 \cos(\eta - \varphi_2) = a \cos(\eta - \varphi), \quad (27)$$

$$\mathbf{Im}(J_1 - J_2) = -a_1 \sin(\eta - \varphi_1) - a_2 \sin(\eta - \varphi_2) = a \sin(\eta - \varphi),$$

gdzie

$$a = \sqrt{(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2)^2 + (a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2)^2},$$

$$\tan \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

A więc dla  $t=t_0$  amplitudy względne funkcji (12) są sobie równe.

Przekształcimy obecnie wyrażenie na  $J_1$ .

Można wykazać, że zachodzi związek

$$\varepsilon(|d|) = \varepsilon_1(|d|) e^{i \frac{\pi d^2}{2}} - \varepsilon_1(|d|) e^{i \left[ \frac{\pi d^2}{2} - \chi(d) \right]} = \varepsilon(|d|) e^{i \left[ \frac{\pi d^2}{2} + \chi(d) \right]},$$

gdzie

$$\tan \chi(d) = \frac{\cos \frac{\pi d^2}{2} \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right] - \sin \frac{\pi d^2}{2} \left[ \frac{1}{2} - C(d) \right]}{\cos \frac{\pi d^2}{2} \left[ \frac{1}{2} - C(d) \right] + \sin \frac{\pi d^2}{2} \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right]}.$$

Ponieważ jest

$$\chi(0) = \frac{\pi}{4}; \quad \chi(|d|) \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{dla} \quad |d| \geq 3,$$

więc

$$\frac{\pi}{4} \leq \chi(d) \leq \frac{\pi}{2}$$

oraz według wzoru (14)

$$J_1 = \frac{-d}{|d|} |\varepsilon_1(|d|)| \left| \exp -i \left[ \eta - \left( \chi(d) - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right|, \quad (28)$$

gdzie<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(|d|)| &= \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - C(|d|) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(|d|) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp(-d^2 \operatorname{tg} \varphi) \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos \varphi}}{\sin 2\varphi} d\varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

A więc  $|\varepsilon_1(|d|)|$  maleje monotonicznie wraz ze wzrostem  $|d|$ . Rozpatrzymy obecnie zachowanie się funkcji (12) dla czasów  $t \geq t_0$ . Zauważmy przede wszystkim, że każda z funkcji (12) składa się z dwóch członów: wyrażenia  $S_0(t)$ , odpowiadającego stanowi ustalonemu, oraz z przebiegu przejściowego o amplitudzie monotonicznie malejącej i częstotliwości zależnej od czasu. Należy się więc spodziewać, że przebieg obwiedni amplitudy będzie się składał z następujących po sobie, monotonicznie malejących z czasem maksimów i minimów (dla funkcji  $u_z^{(m)}$ ,  $u_{zz}^{(m)}$  i  $u_{tz}^{(m)}$  jest to oczywiste, dla pozostałych funkcji własność tę udowodnimy). Czas występowania ekstremów, tzn. ich częstotliwość zależy od szybkości zmian różnicy faz przebiegu ustalonego i przejściowego. Maksima odpowiadają fazom zgodnym, minima — przeciwnym. Ścisłe rzecz biorąc, ekstrema te są nieco przesunięte w kierunku czasów wcześniejszych ze względu na monotoniczne malenie amplitudy przebiegu przejściowego. Przesunięcie to jest jednak nieznaczne, ponieważ szybkość zmian różnicy faz jest dużo większa niż szybkość zmian amplitudy. Wynika to między innymi stąd, że w czasie od  $t_0$  do nieskończoności amplituda przebiegu przejściowego maleje monotonicznie od wartości skończonej do zera, podczas gdy różnica faz przyjmuje nieskończenie wiele razy  $2\pi$ . Dalej ze wzorów (12) i (27) widać, że wszystkie funkcje (12) mają takie same argumenty dla funkcji trygonometrycznych, a więc czasy występowania ekstremów są wspólne dla wszystkich funkcji (12), tzn. dla wszystkich rodzajów pobudzeń falowodów.

Aby znaleźć czasy występowania ekstremów zauważmy, że dla  $d$  bliskich zera jest

$$|J_1| \gg |J_2|,$$

jeśli

$$z \gg \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{c} \frac{(b_m^2 - 1)^{3/2}}{b_m^2} = \frac{\lambda_0}{4\pi} \frac{(b_m^2 - 1)^{3/2}}{b_m^2},$$

<sup>1</sup> I. M. Ryžik i I. S. Gradsztein: Tablice całek, sum, riadow i proizwiedienij, wzór 6.236.5.

a więc dla  $d \approx 0$  możemy rozpatrywać tylko  $J_1(t)$  i  $S_0(t)$ . Rozpatrzmy różnice ich argumentów:

$$\left( \omega_0 t - \frac{z}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2} \right) - \left[ \eta - \left( \chi(d) - \frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = 2k\pi$$

gdzie  $k = \frac{1}{2}n$ ;  $n$  dowolna całkowita.

Podstawiając wyrażenie na  $\eta$  oraz oznaczając

$$x = \frac{1}{\beta} = \frac{ct}{z} = \frac{t}{t'}; \quad t' = \frac{z}{c}$$

otrzymamy równanie:

$$x^2(b_m^2 - 1) - 2b_m x \left[ b_m \beta_0 + \frac{\pi}{\omega_m t'} (2k - a) \right] + \left[ b_m \beta_0 + \frac{\pi}{\omega_m t'} (2k - a) \right]^2 + 1 = 0,$$

gdzie

$$a = \frac{m}{4} - 1 \quad 0 \leq m \leq 1;$$

$$m = 0 \quad \text{dla} \quad d = 0; \quad m \approx 1 \quad \text{dla} \quad d \geq 3.$$

Następnie znajdujemy wyróżnik tego równania  $\Delta$  i żądamy aby  $\Delta \geq 0$ , ponieważ  $x$  jest rzeczywiste. Rozwiązujeć tę nierówność otrzymujemy warunki na  $k$

$$\Delta > 0 \quad \text{dla} \quad k < k_2 \quad \text{lub} \quad k > k_1,$$

gdzie

$$k_1 = \frac{a}{2},$$

$$k_2 = \frac{\omega_m t'}{2\pi} \left[ \frac{a\pi}{\omega_m t'} - 2\sqrt{b_m^2 - 1} \right] < k_1.$$

Ponieważ dla  $k = k_1$  jest  $x_1 = x_0 = \frac{1}{\beta_0}$

dla  $k = k_2$  jest  $x_2 = -x_0 = -\frac{1}{\beta_0}$ ,

a nas interesują czasy  $t > 0$  ( $x > 1$ ), więc powinno być

$$k > k_1 = \frac{a}{2}.$$

Łatwo jest znaleźć różnicę faz dla  $t = t_0$ . Wynosi ona wtedy dokładnie  $a\pi = -\pi$ , gdyż  $m = 0$  dla  $x = x_0$ . Ogólnie wartości  $x$ , dla których różnica faz wynosi  $2k\pi$ , są

$$x_k = x_0 \left[ 1 + \frac{\pi}{\omega_m t'} \left( 2k - \frac{a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{b_m^2 - 1}} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi}{\omega_m t'} \frac{1}{b_m \sqrt{b_m^2 - 1}} \sqrt{\left( k - \frac{a}{2} \right) \left( k - \frac{a}{2} + \sqrt{b_m^2 - 1} \cdot \frac{\omega_m t'}{\pi} \right)} \right]. \quad (30)$$

Uwzględniliśmy tu już warunek, że powinno być

$$x = \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\beta_0} = x_0.$$

Obecnie uprościmy nieco wynik w założeniu, że<sup>2</sup>

$$\sqrt{\omega_m t'} \gg 1 \quad \text{tzn.} \quad \sqrt{\omega_m z} \gg \sqrt{c}. \quad (31)$$

Warunek ten odpowiada dostatecznie długim falowodom oraz dostatecznie dużym częstotliwościami odcienia. Na przykład dla fal centymetrowych  $\omega_m$  jest rzędu  $10^{10}$ ; wtedy już dla  $z=3m$  jest  $\sqrt{\frac{\omega_m z}{c}} = 10$ .

Zakładamy więc  $\sqrt{\frac{\omega_m z}{c}} \gg 1$  i rozwijamy na szereg, ograniczając się do małych rzędu  $\left(\frac{\omega_m z}{c}\right)^{-1/2}$ , otrzymamy:

$$x_k = x_0 + 2 \left( \frac{\pi}{\omega_m t'} \right)^{1/2} \left( b_m^2 - 1 \right)^{-3/4} \sqrt{k - \frac{a}{2}}. \quad (32)$$

Znajdźmy jeszcze wartości  $d$  odpowiadające  $x_k$  (występowaniu ekstremów). Rozwińmy w tym celu  $d(x)$  na szereg w otoczeniu  $d(x_0)=0$

$$d(x_k) = d'(x_0)(x_k - x_0) = \left( \frac{\omega_m z}{\pi c} \right)^{1/2} \left( b_m^2 - 1 \right)^{3/4} \left( x_k - x_0 \right) = 2 \sqrt{k - \frac{a}{2}}, \quad (33)$$

gdzie

$k = 0, 1, 2, \dots$  odpowiadają chwilom występowania maksimów,

$k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}(2n+1)$  odpowiadają chwilom występowania minimów,

$$a = \frac{m}{4} - 1; \quad 0 \leq m \leq 1; \quad m \approx 1; \quad \text{dla } d \geq 3.$$

Zakładając  $m \approx 1$  otrzymamy

$$d(x_{k=0}) = \sqrt{1,5} = 1,225,$$

$$d(x_{k=1}) = \sqrt{5,5} = 2,345.$$

<sup>2</sup> Można udowodnić, że warunek (31) jest dostateczny na to, aby wzory asymptotyczne (12) miały sens. Zostało to wykazane w innej, nieopublikowanej pracy autora.

Wartości te zgadzają się z dokładnością co najmniej do 2 znaków po przecinku z wartościami podawanymi przez inne źródła, na przykład przez Ginzburga [7].

Znając te wielkości łatwo znajdziemy przepięcie dla  $u_z$ . Równa się ono modułowi  $|J_1|$  dla  $d=1,225$ . Podstawiając otrzymamy

$$|J_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - C(d) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right]^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(0,19861)^2 + (0,14188)^2} = 0,1726 .$$

W związku z uzyskanym wynikiem, powstaje pytanie jak się przedstawia sprawa przepięć dla innych funkcji (12). Otóż w funkcjach  $u^{(m)}$ ,  $u_{tt}^{(m)}$ ,  $u_{tz}^{(m)}$  wyrażenie  $J_1$  (zakładamy  $|J_1| \gg |J_2|$ ) mnożone jest przez czynniki rosnące monotonicznie z czasem do nieskończoności, w funkcjach  $u_{zz}^{(m)}$ ,  $u_{tz}^{(m)}$  mnożniki  $J_1$  maleją monotonicznie. Możemy zatem na pewno twierdzić, że również i dla funkcji  $u_{zz}^{(m)}$  i  $u_{tz}^{(m)}$  pierwsze maksimum występujące dla  $d$  bliskich 1,225 jest największe. Udowodnimy, że jest to słuszne i dla innych funkcji. Wykażemy również, że w praktycznie ważnych przypadkach wartość pierwszego maksimum jest jednakowa dla wszystkich funkcji (12). Oznaczmy dla dowodu przez  $f(x)$  funkcję występującą jako mnożnik odpowiednio przy  $(J_1 - J_2)$  lub  $(J_1 + J_2)$  we wzorach (12). Z postaci tej funkcji widzimy, że najszybciej rośnie ona we wzorze na  $u^{(m)}$ , a więc wystarczy przeprowadzić dowód tylko dla  $u^{(m)}$ . Dla  $u^{(m)} f(x)$  dane jest przez

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_m^2}}{\omega_m} .$$

A więc przy zrobionym uprzednio założeniu  $|J_1| \gg |J_2|$  należy udowodnić, że  $f(x)|J_1|$  maleje monotonicznie dla  $d \geq d(x_{k=0})$ . Po opuszczeniu stałych współczynników sprowadza się to do badania funkcji

$$(x^2 - 1)^{1/2} |\epsilon(|d(x)|)| . \quad (34)$$

Aby dowieść, że funkcja (34) maleje monotonicznie dla  $d \geq d(x_{k=0}) = 1,225$  wystarczy dowieść, że dla  $x \geq x_{k=0}$  pochodna

$$\frac{d}{dx} \left[ (x^2 - 1)^{1/2} |\epsilon(|d(x)|)| \right] < 0 \quad (35)$$

jest mniejsza od zera. Wyliczając otrzymamy

$$\frac{d}{dx} \left[ (x^2 - 1)^{1/2} |\epsilon(|d(x)|)| \right] =$$

$$= x(x^2 - 1)^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \left[ C(d) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(d) - \frac{1}{2} \right]^2 - \left\{ \left[ \frac{1}{2} - C(d) \right] \cos \frac{\pi}{2} d^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right] \sin \frac{\pi}{2} d^2 \right\} \frac{x^2 - 1}{x} d'(x) \right\} \sqrt{\left[ C(d) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(d) - \frac{1}{2} \right]^2}. \quad (36)$$

Ze wzoru (29) wiemy, że wyrażenie

$$\left[ C(d) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(d) - \frac{1}{2} \right]^2$$

maleje monotonicznie ze wzrostem  $d$ .

Dalej jest<sup>3</sup>

$$\left[ \frac{1}{2} - C(d) \right] \cos \frac{\pi}{2} d^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right] \sin \frac{\pi}{2} d^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-2td} \sin t^2 dt}.$$

A więc i to wyrażenie maleje monotonicznie ze wzrostem  $d$ .

Dla udowodnienia (35) należy zatem wykazać, że zachodzi nierówność

$$\left[ C(d) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(d) - \frac{1}{2} \right]^2 < \left\{ \left[ \frac{1}{2} - C(d) \right] \cos \frac{\pi}{2} d^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right] \sin \frac{\pi}{2} d^2 \right\} \frac{x^2 - 1}{x} d'(x) \quad \text{dla } d > 1. \quad (37)$$

Zauważmy przede wszystkim, że korzystając z rozwinięć asymptotycznych  $S(d)$  i  $C(d)$  dla  $d > 1$  otrzymamy po przekształceniach

$$\left[ C(d) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(d) - \frac{1}{2} \right]^2 = \frac{1}{\pi^2 d^2} + \left[ \frac{1}{\pi^2 d^3} \right]^2,$$

$$d \left\{ \left[ \frac{1}{2} - C(d) \right] \cos \frac{\pi}{2} d^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right] \sin \frac{\pi}{2} d^2 \right\} = \frac{1}{\pi^2 d^2}.$$

Jest więc

$$\left[ C(d) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(d) - \frac{1}{2} \right]^2 \approx \left\{ \left[ \frac{1}{2} - C(d) \right] \cos \frac{\pi}{2} d^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(d) \right] \sin \frac{\pi}{2} d^2 \right\} d \quad (38)$$

z dokładnością

$$\left( \frac{1}{\pi^4 d^6} \right) \approx 10^{-2} \quad \text{dla } d = 1.$$

<sup>3</sup> Ryżik i Gradsztajn, I. c. wzór 6.236.3.

Aby dowieść (37), wystarczy więc wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{x^2-1}{x} \frac{d'(x)}{d(x)} \geq n > 1 \quad \text{dla } d > 1; \quad x > x_0.$$

Otoż jest

$$\frac{x^2-1}{x} \frac{d'(x)}{d(x)} = \frac{\frac{3}{2} b_m x \sqrt{x^2-1} - \frac{3}{2} x^2 + 1}{b_m x \sqrt{x^2-1} - x^2} \geq n$$

stąd

$$b_m x \sqrt{x^2-1} \left[ \frac{3}{2} - n \right] - \left[ \frac{3}{2} - n \right] x^2 + 1 \geq 0$$

co zawsze zachodzi dla  $n \leq \frac{3}{2}$  i  $x \geq x_0$ , gdyż

$$\frac{b_m}{x} \sqrt{x^2-1} \geq 1 \quad \text{i} \quad \frac{b_m x^2}{x} \sqrt{x^2-1} \geq x^2. \quad (39)$$

Przyjmiemy  $n = \frac{3}{2}$  i wykażemy, że to wystarcza, aby był spełniony warunek (37). Weźmy przypadek najniekorzystniejszy  $d = 1$ , wtedy również (38) zachodzi z dokładnością do  $\left( \frac{1}{\pi^4 d^6} \right) \approx 10^{-2}$ .

Dokładniejsze obliczenia dają

$$\left[ C(1) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ S(1) - \frac{1}{2} \right]^2 = 0,08149,$$

$$\left[ \frac{1}{2} - C(1) \right] \cos \frac{\pi}{2} + \left[ \frac{1}{2} - S(1) \right] \sin \frac{\pi}{2} = 0,06175,$$

$$\frac{3}{2} \cdot 0,06175 = 0,09262 > 0,08149$$

a więc jest spełniony warunek (37). Ponieważ dla  $d > 1$  nierówność (37) jest tym bardziej spełniona, udowodniliśmy zatem, że dla  $d \geq 1$  zachodzi (35), tzn. amplituda członu przejściowego funkcji  $u^{(m)}$ , a więc i pozostałych funkcji maleje monotonicznie dla  $d \geq 1$ . Wynika stąd wniosek, że pierwsze maksimum amplitudy, występujące u wszystkich funkcji (12) dla  $d = 1,22$ , jest największe i daje wartość występującego przepięcia. Obecnie wykażemy, że dla praktycznie ważnych parametrów  $b_m$  i częstotliwości wartości pierwszego maksimum jest w przybliżeniu taka sama dla wszystkich funkcji (12). Wystarczy w tym celu udowodnić, że wartości funkcji  $f(x)$ , występujących jako mnożniki wyrażenia  $|\varepsilon(|d|)|$ , są dla zmian  $d$  w granicach  $-1,2 \leq d \leq 1,2$  bardzo bliskie jedności. Dowód

wystarczy przeprowadzić albo dla funkcji najszybciej malejącej albo dla funkcji najszybciej rosnącej. Takimi funkcjami są odpowiednio  $u_{zz}^{(m)}$  i  $u^{(m)}$ , przy czym  $f'(x_0)$  dla  $u^{(m)}$  jest równe  $-f'(x_0)$  dla  $u_{zz}^{(m)}$ . Wystarczy zatem rozpatrywać tylko jedną z tych funkcji, np.  $u^{(m)}$ . Rozwińmy  $f(x)$  na szereg w otoczeniu  $x=x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) \left[ 1 + \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(x - x_0) \right].$$

Ponieważ wykazaliśmy (26), że  $f(x_0) = 1$  dla wszystkich funkcji (12), więc

$$f(x) = 1 + f'(x_0)(x - x_0)$$

lub ze względu na  $d = d'(x_0)(x - x_0)$ ;  $x - x_0 = \frac{d(x)}{d'(x_0)}$ ,

stąd

$$f(x) = 1 + \frac{f'(x_0)}{d'(x_0)} \cdot d = 1 + \frac{f'(x_0) \cdot d}{\sqrt{\frac{\omega_m z}{\pi c} (b_m^2 - 1)^{1/4}}}. \quad (40)$$

Dla funkcji  $u^{(m)}$

$$f'(x_0) = \sqrt{b_m^2 - 1} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = b_m \sqrt{b_m^2 - 1}.$$

Mamy więc

$$f(x) = 1 + \frac{b_m \sqrt{b_m^2 - 1} \cdot d}{\sqrt{\frac{\omega_m z}{\pi c} (b_m^2 - 1)^{1/4}}} = \frac{b_m d}{\sqrt{\frac{\omega_m z}{\pi c} (b_m^2 - 1)^{1/4}}} + 1. \quad (41)$$

Jeśli założymy, że spełniony jest warunek (31)  $\sqrt{\frac{\omega_m z}{c}} \gg 1$ , to z (41) mamy  $f(x) \approx 1$ , gdy tylko  $\frac{b_m}{(b_m^2 - 1)^{1/4}}$  jest niezbyt duże. Aby spełnić ten ostatni warunek,  $b_m$  nie może być bliskie jedności i nie może przyjmować wartości dużych. I tak, np. dla  $1,05 \leq b_m \leq 2$ , jest

$$\text{dla } b_m = 2 \quad \frac{b_m}{(b_m^2 - 1)^{1/4}} = 1,5197,$$

$$\text{dla } b_m = 1,05 \quad \frac{b_m}{(b_m^2 - 1)^{1/4}} = 1,8557.$$

A więc człon dodatkowy we wzorze (41) jest rzędu  $\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_m z}{\pi c}}} \ll 1$  i może być pominięty wobec jedności.

Wynikają stąd dwa wnioski

- 1) amplitudy członów przejściowych są w przybliżeniu jednakowe dla  $d$  spełniających np. warunek  $|d| \leq 3$ ,
- 2) wartości maksymalne przepięć są w przybliżeniu jednakowe dla wszystkich funkcji (12), tzn. wszystkich rodzajów pobudzeń falowodu i wynoszą ok. 17% stanu ustalonego.

### CZAS NARASTANIA

Istnieją różne definicje czasu narastania. Ich cechą wspólną jest badanie szybkości zmian w czasie amplitudy przebiegu nieustalonego w otoczeniu chwiliadejścia fali głównej. Na podstawie dotychczasowych rozważań możemy stwierdzić już teraz, że czasy narastania dla poszczególnych funkcji (12) różnią się na ogół nieistotnie między sobą. Rozpatrzmy to zagadnienie ilościowo. Zaczniemy od najprostszej funkcji  $u_z^{(m)}$ .

Jeśli zdefiniujemy czas narastania jako czas wzrostu amplitudy od 0,1 do 0,9 wartości stanu ustalonego, to otrzymamy z krzywej Fresnela, że wartość 0,1 odpowiada  $d = -2$ , a wartość 0,9 odpowiada  $d = 1$ . Rozwijając  $d$  na szereg w otoczeniu  $x = x_0$  otrzymamy

$$d = d'(x_0)(x - x_0) = \left( \frac{\omega_m z}{c\pi} \right)^{1/2} \frac{c}{z} (b_m^2 - 1)^{1/2} (t - t_0) = \frac{\vartheta}{\tau}, \quad (42)$$

gdzie

$$\tau = \left( \frac{\omega_0 c}{z\pi} \right)^{-1/2} (b_m^2 - 1)^{-1/2} b_m^{1/2} \quad (43)$$

można uważać za pewien standardowy czas narastania

$$\vartheta = t - t_0, \quad (44)$$

wtedy czas narastania jest  $\Delta t = \Delta d \tau \approx 3\tau$ . (45)

Możemy również za czas narastania przyjąć podwojony czas, jaki upłynie od chwiliadejścia fali głównej do pojawienia się pierwszego maksimum. Otrzymamy wtedy

$$\Delta t_m = 2 \cdot 1,22\tau = 2,44\tau. \quad (46)$$

Zauważmy, że tak zdefiniowany czas narastania jest jednakowy dla wszystkich funkcji (12), a więc należy wzór (46) stosować wtedy, gdy spełniony jest warunek (31).

Weźmy obecnie zakres, w którym można stosować wzory (24) (tzn.  $d \geq 3$ ). Można wtedy uzyskać następujące wyrażenia [7]

$$|u_z^{(m)}| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi d} \cos \frac{1}{2} \pi \left( d^2 + \frac{1}{2} \right), \quad t > t_0$$

$$|u_z^{(m)}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi d} \quad t < t_0.$$

Jeżeli teraz zdefiniujemy czas narastania jako czas  $\Delta t_{n\%}$ , wymagany, aby obwiednia amplituda wzrosła od  $n\%$  stanu ustalonego do takiej wartości, że amplituda oscylacji nie przekracza  $n\%$ , to otrzymamy

$$n = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \quad (\text{przy czym } n \leq 0,07),$$

$$\Delta d_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi n},$$

$$\Delta t_{n\%} = \Delta d \tau = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \tau = \frac{0,45}{n} \tau, \quad (47)$$

dla  $n=5\%$  jest  $\Delta t_{5\%}=9\tau$ .

Dotychczasowe rozważania nad czasem narastania, a w szczególności wzory (45) i (47), dotyczyły ściśle rzeczy biorąc tylko funkcji  $u_z^{(m)}$ . Wychodząc z założeń potrzebnych dla uzyskania wzoru (47), możemy znaleźć czasy narastania dla innych funkcji (12). Otóż dla przebiegów przejściowych możemy napisać, że każda funkcja (12) ma postać  $f(x) \cdot u_z^{(m)}$ ,

a więc

$$|f(x) u_z^{(m)}| = f(x) |J_1(x)|.$$

W otoczeniu  $x_0$  jest

$$f(x) = 1 + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + f'(x_0) \frac{c}{z} \vartheta.$$

Mamy więc

$$[1 + f'(x_0)] \frac{\tau}{\sqrt{2\pi} |\vartheta|} = n. \quad (48)$$

Dla  $t < t_0$  jest  $\vartheta_1 = t_1 - t_0 < 0$ ;  $|\vartheta_1| = -\vartheta_1$ .

Podstawiając  $|\vartheta_1|$  do (48) i rozwiązuje go względem  $\vartheta_1$ , otrzymamy

$$\vartheta_1 = -\frac{\tau}{\sqrt{2\pi} n} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\sqrt{2\pi} n} \frac{c}{z} f'(x_0)} \right].$$

Analogicznie dla  $\vartheta_2 = t - t_0 > 0$  ( $t > t_0$ ) jest

$$\vartheta_2 = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi} n} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\tau}{\sqrt{2\pi} n} \frac{c}{z} f'(x_0)} \right],$$

skąd

$$\Delta t_n = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{\sqrt{2} \tau}{\pi n} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\tau}{n \sqrt{2\pi}} \frac{c}{z} f'(x_0) \right)^2} \right] \quad (49)$$

lub oznaczając

$$\frac{\sqrt{2} \tau}{\pi n} = \Delta t_n^{(z)}$$

mamy

$$\Delta t_n = \Delta t_n^{(z)} \frac{1}{1 - \left( \frac{\Delta t_n^{(z)}}{2} f'(x_0) \frac{c}{z} \right)^2}, \quad (50)$$

Wzory (49) i (50) dają czas narastania dowolnej funkcji (12). Wartości  $f'(x_0)$  łatwo znaleźć z wzorów (12).

Wszystkie wyprowadzone powyżej wzory są słuszne pod warunkiem  $|J_1| \gg |J_2|$ , tzn.

$$z \gg \frac{\lambda_0}{4\pi} \frac{(b_m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{b_m^2}.$$

Warunek ten jest na ogół spełniony w praktycznie ważnych przypadkach. Można jednak dla  $d \geq 3$  znaleźć czas narastania uwzględniający zmiany  $J_1$  i  $J_2$ , przynajmniej dla funkcji  $u^{(m)}$ . Weźmy w tym celu amplitudę przebiegu przejściowego funkcji  $u^{(m)}$ . Z wzorów (15) i (25) mamy

$$I_m(J_1 - J_2) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\eta}} \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\right) \left[ -\frac{1}{1 - b_m \sqrt{1 - \beta^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{1 + b_m \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-\beta}{\sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}} \frac{\sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right)}{1 - b_m^2(1 - \beta^2)} \right]. \quad (51)$$

A więc amplituda członu przejściowego, unormowana do jedynki dla stanu ustalonego, jest

$$u_A^{(m)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega_m t}} \frac{\beta_0 b_m}{1 - b_m^2(1 - \beta^2)} (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} = l. \quad (52)$$

Z równania (52) będziemy mogli znaleźć czasy, w których amplituda przyjmuje wartość 1 odpowiednio przed i po nadejściu fali głównej. Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$r^4 - 4r^3r_0 + 6r^2r_0^2 - r \left[ 4r_0^3 + \left( \frac{Ar_0}{lb_m^2} \right)^4 \right] + r_0^4 \left[ 1 + \left( \frac{Ar}{lb_m^2} \right)^4 \right] = 0, \quad (53)$$

gdzie

$$r = x^2 = \frac{1}{\beta^2}; \quad r_0^2 = x_0^2 = \frac{b_m^2}{b_m^2 - 1},$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \frac{z}{c} \beta_0 b_m. \quad (54)$$

Równanie to ma dwa nieujemne rozwiązania rzeczywiste

$$x_{12} = x_0 \sqrt{1 + \frac{1}{V^2} \left( \frac{A}{lb_m^2} \right) \left( \sqrt[3]{g+h} - \sqrt[3]{g-h} \right)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{Ar_0}{lb_m^2 V^2} \left( \sqrt[3]{g+h} - \sqrt[3]{g-h} \right)^{-\frac{3}{2}} - 1} \right) \quad (55)$$

gdzie

$$g = \sqrt{\left( \frac{r_0^2}{16} \right)^2 + \left( \frac{r_0 - 1}{3} \right)^3}; \quad h = \frac{r_0^2}{16} \left( \frac{A}{lb_m^2} \right)^2. \quad (56)$$

Wzór (55) jest skomplikowany i niedogodny do dyskusji. Uprościmy go w założeniu, że spełniony jest warunek (31), to znaczy że  $\sqrt{w_m z} \gg V/c$ . Wtedy jest, jak nietrudno zauważyć z (54),  $A \ll 1$  i dalej możemy założyć, że zachodzi warunek

$$\left( \frac{A}{lb_m^2} \right) \ll 1, \quad (57)$$

a stąd oraz z (56) wynika, że  $g \gg h$ , to znaczy

$$\sqrt{\left( \frac{r_0^2}{16} \right)^2 + \left( \frac{r_0 - 1}{3} \right)^3} \gg \frac{r_0^2}{16} \left( \frac{A}{lb_m^2} \right)^2. \quad (58)$$

Korzystając z (58) znajdujemy wartości przybliżone dla wyrażenia

$$\sqrt[3]{g+h} - \sqrt[3]{g-h} \approx \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{r_0^2}{16} \right)^2 + \left( \frac{r_0 - 1}{3} \right)^3 \right]^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{A}{lb_m^2} \right)^2 \frac{r_0^2}{16} + 0 \left[ \left( \frac{A}{lb_m^2} \right)^2 \frac{r_0^2}{16} \right]^3. \quad (59)$$

Podstawiając (59) do (55) i ograniczając się do małych rzędu  $\frac{A}{lb_m^2}$  mamy

$$x_{12} \approx x_0 \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} 3^{1/4} \frac{A}{lb_m^2} \left[ \left( \frac{r_0^2}{16} \right)^2 + \left( \frac{r_0 - 1}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{12}} \right\}. \quad (60)$$

Jeżeli obecnie za czas narastania przyjmiemy różnicę czasów  $t_2 - t_1$ , odpowiadającą chwilom, gdy amplituda członu przejściowego przybiera wartość  $l$  (np.  $l=0,1$ ) odpowiednio po i przed nadejściem fali głównej, otrzymamy

$$\Delta t_l = t_2 - t_1 = \frac{z}{c} (x_2 - x_1) = 3^{1/4} \left( \frac{A}{lb_m^2} \right) \left[ \left( \frac{r_0^2}{16} \right)^2 + \left( \frac{r_0 - 1}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{12}}.$$

Po przekształceniach i wydzieleniu standardowego czasu narastania  $\tau$  mamy

$$\begin{aligned} \Delta t_l &= \frac{\sqrt{2}}{\pi l} \tau 3^{1/4} \left[ \frac{(b_m^2 - 1)^5}{256 b_m^4} + \frac{(b_m^2 - 1)^6}{27 b_m^{12}} \right]^{\frac{1}{12}} = \\ &= \Delta t_l^{(z)} 3^{1/4} \left[ \frac{(b_m^2 - 1)^5}{256 b_m^4} + \frac{(b_m^2 - 1)^6}{27 b_m^{12}} \right]^{\frac{1}{12}}, \end{aligned} \quad (61)$$

gdzie

$$\Delta t_l^{(z)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi l} \tau.$$

A więc wzory (61) i (47) różnią się tylko mnożnikiem

$$3^{1/4} \left[ \frac{(b_m^2 - 1)^5}{256 b_m^4} + \frac{(b_m^2 - 1)^6}{27 b_m^{12}} \right]^{1/12}.$$

Dla używanych zazwyczaj wartości  $b_m$  ( $b_m$  niezbyt bliskie jedności, oraz  $b_m$  nie za duże) mnożnik ten, ze względu na potęgę  $\frac{1}{12}$ , jest bliski jedności, tak że rząd  $\Delta t_l$  jest taki sam jak  $\Delta t_l^{(z)}$ . Wzór (61), ściśle rzecz biorąc, odnosi się tylko do funkcji  $u^{(m)}$ , ale podobnie jak do wzoru (47) można i tu znaleźć poprawki dla innych funkcji (12).

Obecnie damy interpretację otrzymanych wyników. Porównując wzory: (45), (46), (47), (50) i (61) widzimy, że czas narastania jest proporcjonalny do  $\tau$ . Zbadamy więc zależność od poszczególnych parametrów. Otóż jest

$$\tau = \left( \frac{z\pi}{\omega_0 c} \right)^{1/2} \frac{b_m^{1/2}}{(b_m^2 - 1)^{3/4}}.$$

Wypływa stąd wnioski:

- 1) czas narastania jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości falowodu i odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z częstotliwości  $\omega_0$ .
- 2) dla  $b_m \rightarrow \infty$ ,  $x_0 \rightarrow 1$ ,  $\tau \sim \frac{1}{b_m}$ .

Oznacza to, że wyższe częstotliwości mają krótszy czas narastania.

- 3) dla  $b_m \rightarrow 1$ ,  $x_0 \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ .

Aby wyjaśnić ostatni wynik zauważmy, że czas nadejścia fali głównej  $t_0 = \frac{z}{c} x_0 \rightarrow \infty$  wraz z  $x_0$  dąży do nieskończoności. Nic więc dziwnego,

że w tym przypadku czoło fali głównej jest rozmyte i czas narastania dąży do nieskończoności.

### Przykłady liczbowe

Dla zorientowania się w rzędzie wartości oraz porównania wyników przeprowadzimy obliczenia numeryczne. Do obliczeń przyjmiemy  $b=1,2$ ,  $\omega_0=1,09$  c oraz dwie wartości na długość falowodu:  $z_1=30$  m i  $z_2=3000$  m.

Przed obliczeniami wprowadźmy pewne oznaczenia.  
Według wzoru (40) mamy

$$f(x) = 1 + \sqrt{\frac{f'(x_0) \cdot d}{\frac{\omega_0 z}{c\pi} (b_m^2 - 1)^{3/4}}} = 1 + \Delta,$$

tzn.

$$\Delta = \frac{f'(x_0) \cdot d}{\sqrt{\frac{\omega_m z}{c\pi} (b_m^2 - 1)^{1/4}}}. \quad (62)$$

Z wzoru (50) mamy

$$\Delta t_n = \Delta t_n^{(z)} \frac{1}{1 - \left[ \frac{c}{z} \frac{\Delta t_n^{(z)}}{2} f'(x_0) \right]^2} = \Delta t_n^{(z)} \cdot \varepsilon,$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \left[ f'(x_0) \frac{c}{z} \frac{\Delta t_n^{(z)}}{2} \right]^2}. \quad (63)$$

Obliczmy jeszcze  $\tau$  ze wzoru (43)

$$\tau = \left( \frac{z\pi}{\omega_m c} \right)^{1/2} \frac{1}{(b_m^2 - 1)^{1/4}} = 1,0475 \cdot 10^{-10} \sqrt{Z}.$$

Dla  $z = z_1$  jest  $\tau_1 = 5,7373 \cdot 10^{-9}$ ,Dla  $z = z_2$  jest  $\tau_2 = 5,7373 \cdot 10^{-8}$ .

Wyniki dalszych wyliczeń podano w tablicach

| z = 3 · 10 <sup>3</sup> cm     |                           |                        |       | Δt według wzoru                     |                                     |                        |                         |
|--------------------------------|---------------------------|------------------------|-------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------------|
| funkcja                        | J <sub>1</sub> (1,22) · Δ | prze-<br>pięcie<br>w % | ε     | (50)<br>Δt <sub>n</sub><br>n = 0,05 | (61)<br>Δt <sub>i</sub><br>l = 0,05 | (46)<br>Δt = 2,44 τ    | (45)<br>Δt = 3 τ        |
| u <sup>(m)</sup>               | 9,65 · 10 <sup>-3</sup>   | 18,22                  | 1,044 | 5,39 · 10 <sup>-8</sup>             | 3,03 · 10 <sup>-8</sup>             |                        |                         |
| u <sub>i</sub> <sup>(m)</sup>  | 6,70 · 10 <sup>-3</sup>   | 17,93                  | 1,020 | 5,27 · 10 <sup>-8</sup>             |                                     |                        |                         |
| u <sub>ii</sub> <sup>(m)</sup> | 5,02 · 10 <sup>-3</sup>   | 17,76                  | 1,011 | 5,22 · 10 <sup>-8</sup>             |                                     | 1,4 · 10 <sup>-8</sup> |                         |
| u <sub>z</sub> <sup>(m)</sup>  | 0                         | 17,26                  | 1,000 | 5,17 · 10 <sup>-8</sup>             |                                     |                        | 1,62 · 10 <sup>-8</sup> |
| u <sub>zz</sub> <sup>(m)</sup> | -9,65 · 10 <sup>-3</sup>  | 16,29                  | 1,044 | 5,39 · 10 <sup>-8</sup>             |                                     |                        |                         |
| u <sub>iz</sub> <sup>(m)</sup> | -3,54 · 10 <sup>-3</sup>  | 16,90                  | 1,006 | 5,19 · 10 <sup>-8</sup>             |                                     |                        |                         |

Jak widać z tablic, wyliczenia numeryczne w zupełności potwierdzają wywody teoretyczne.

Reasumując osiągnięte wyniki możemy stwierdzić co następuje.

1) Po nadejściu fali głównej zmiany poszczególnych rodzajów pola elektromagnetycznego rozchodzącego się w falowodzie, zachodzą niejako synchronicznie przynajmniej w tym sensie, że obwiednie ich amplitud osiągają jednocześnie maksima i minima.

| $z = 3 \cdot 10^5 \text{ cm}$ |                           |                        |               | $\Delta t$ według wzoru            |                                    |                               |                            |
|-------------------------------|---------------------------|------------------------|---------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| funkcja                       | $J_1 (1,22) \cdot \Delta$ | prze-<br>pięcie<br>w % | $\varepsilon$ | (50)<br>$\Delta t_n$<br>$n = 0,05$ | (61)<br>$\Delta t_l$<br>$l = 0,05$ | (46)<br>$\Delta t = 2,44\tau$ | (45)<br>$\Delta t = 3\tau$ |
| $u^{(m)}$                     | $9,65 \cdot 10^{-4}$      | 17,35                  |               |                                    | $3,03 \cdot 10^{-7}$               |                               |                            |
| $u_t^{(m)}$                   | $6,70 \cdot 10^{-4}$      | 17,33                  |               |                                    |                                    |                               |                            |
| $u_{tt}^{(m)}$                | $5,02 \cdot 10^{-4}$      | 17,31                  | $= 1,0004$    | $5,17 \cdot 10^{-7}$               |                                    | $1,4 \cdot 10^{-7}$           |                            |
| $u_z^{(m)}$                   | 0                         | 17,26                  |               |                                    |                                    |                               | $1,62 \cdot 10^{-7}$       |
| $u_{zz}^{(m)}$                | $-9,65 \cdot 10^{-4}$     | 17,16                  |               |                                    |                                    |                               |                            |
| $u_{st}^{(m)}$                | $-3,54 \cdot 10^{-4}$     | 17,22                  |               |                                    |                                    |                               |                            |

2) Amplitudy członów przejściowych wszystkich funkcji (12), tzn. wszystkich rodzajów, maleją monotonicznie dla  $d > 1$ . Stąd wniosek, że pierwsze maksimum obwiedni amplitudy dowolnej funkcji (12) jest największe, a więc jest miarą przepięcia występującego w falowodzie. Dalej wykazaliśmy przy pewnych założeniach co do długości falowodu, że przepięcia te są jednakowe dla wszystkich rodzajów pola w falowodzie i wynoszą około 17% stanu ustalonego. Przy falowodach krótkich np. nie spełniających warunku  $|J_1| \gg |J_2|$ , przepięcia wzrastają i są na ogół różne dla różnych rodzajów pola w falowodzie.

3) Czas narastania jest w przybliżeniu jednakowy dla wszystkich składowych pola elektromagnetycznego w falowodzie.

4) Czas narastania jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości falowodu i odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z częstotliwości granicznej.

5) Gdy częstotliwość pracy zbliża się do częstotliwości odcięcia ( $b_m \rightarrow 1$ ), czoło fali głównej rozmywa się i czas narastania wzrasta, dając w przypadku granicznym do nieskończoności. Gdy częstotliwość pracy wzrasta tak, że stosunek  $b_m = \frac{\omega_0}{\omega_m} \gg 1$ , czas narastania zachowuje się w przybliżeniu jak  $\frac{1}{b_m}$ . Wynika z tego między innymi fakt, że wyższe rodzaje narastają w falowodach szybciej niż rodzaj podstawowy.

W zakończeniu pragnę wyrazić wdzięczność Panu kand. R. Gajewskiemu za jego cenne uwagi i wskazówki udzielone mi podczas przygotowania tej pracy.

## WYKAZ LITERATURY

1. Alpert Y., Ginzburg V., Fainberg E.: Rasprostranenie radiowołn. Moskwa, 1953, s. 384.
2. de Broglie L.: Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. Paris 1941.
3. Cerillo M.: Transients in waveguides. Techn. Rep. of the Electronics Labor. MIT nr 33, 1948.
4. Chien W. Z., Infeld L., Pounder J. R., Stevenson A. F., Syng e J. L., — Canad. J. Research A.: t. 27, 1949, s. 69.
5. Cohn G. I.: Proc. nat. electronic conference, t. 8, 1953, s. 284.
6. Gajewski R.: Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, t. 3, 1955, s. 29.
7. Gajewski R.: On transient radiation of a dipole inside a waveguide I i II. Acta Phys. Polon. t. 15, 1956, s. 25, t. 16, 1957, s. 3.
8. Pearson J.: Quart Mech. Appl. Math. t. 6, 1953, s. 313.
9. Poincelot P.: Ann. Telecomm. t. 9, 1954, s. 315.
10. Rubinowicz W.: Propagation of a cut off train of de Broglie waves. Acta Phys. Polon. t. 10, 1950, s. 79.  
— Acta Phys. Polon. t. 13, 1954, s. 115.  
— Über die Fortpflanzung unstetiger elektromagnetischer Signale in Wallenleitern: Acta Phys. Polon. t. 14, 1955, s. 209 i 225.

## ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ И ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВОЛНОВОДАХ.

## Резюме

В настоящей работе обсуждены нестационарные состояния всех составляющих напряженностей электрического и магнитного полей любого типа, возникающих в волноводе произвольного сечения с совершенной проводимостью стенок, возбуждаемом электрическим диполем. В особенности точно рассмотрены времена установления отдельных составляющих и возникающие перенапряжения.

Теоретические выводы пояснены числовыми примерами. Полученные результаты могут быть вкратце сформулированы следующим образом:

1) после прихода основной волны (т. е. волны распространяющей с групповой скоростью  $V_{gr}$ ) изменения отдельных типов распространяющегося в волноводе электромагнитного поля происходят некоторым образом синхронно, в том смысле по крайней мере, что огибающие их амплитуды одновременно достигают максимумов и минимумов.

2) Амплитуды переходных членов всех типов монотонно уменьшаются не позже чем с момента появления первого максимума результирующего процесса (т. е. с момента, когда переходной и стационарный члены впервые имеют одинаковую фазу).

Отсюда мы заключаем, что первый максимум огибающей амплитуд любого типа наибольший, и следовательно он является мерою перенапряжения.

3) Предполагая, что  $\sqrt{\frac{\omega_m z}{c}} \gg 1$ ,

где  $\omega_m$  — критическая частота

$z$  — длина волновода

$c$  — скорость света

мы доказали, что

а) Перенапряжения одинаковы для всех типов составляющих поля и равны ок. 17% стационарного состояния.

б) Время установления приблизительно одинаково для всех составляющих поля в волноводе.

в) Время установления прямо пропорционально квадратному корню из длины волновода и обратно пропорционально квадратному корню критической частоты.

4) Когда рабочая частота приближается к критической частоте ( $b_m = \frac{\omega}{\omega_m} \rightarrow 1$ )

то фронт основной волны размывается и время установления возрастает, стремясь в предельном случае к бесконечности. Когда рабочая частота значительно

больше критической частоты ( $b_m = \frac{\omega}{\omega_m} \gg 1$ ), то поведение времени установления приблизительно равно  $\frac{1}{b_m}$ .

## TRANSIENT TIME AND SURGE VOLTAGE OF THE TRANSIENTS PHENOMENA IN WAVEGUIDES

### Summary

The paper is concerned with the investigation of the following problem: a dipole with moment  $\vec{M}$  is placed inside a wave guide of an arbitrary cross section and with perfectly conducting walls.  $\vec{M}$  depends on time through a factor  $1(t)$ ,  $f(t)$ ,  $1(t)$  being Heaviside's step function. The electric and magnetic field intensities of all modes, at an arbitrary point inside the waveguide, and at an arbitrary moment  $t > 0$  are of interest. The cross section of the tube is supposed to be constant.

The theoretical considerations are illustrated with the numerical examples. The results may be formulated as follows.

1. After the main wave had come (that is the wave which is propagating with the group velocity  $V_{gr}$ ) the changes of all modes of the electromagnetic field in guide are synchronous in the sense that their amplitudes have their extreme values simultaneously.

2. The amplitudes of the transient terms of all the modes are surely monotonic decreasing quantities after the first maximum value of the summary function had been reached (that is from the while when the steady state and transient term had the same phase for the first time. Hence the first maximum of the envelope of the amplitude of any mode is the greatest and so it is the *surge voltage*.

3. Assuming the condition:

$$\sqrt{\frac{\omega_m z}{c}} \gg 1 \text{ is fulfilled,}$$

where

$\omega_m$  = cut-off radial velocity,

$z$  = the length of the wave guide,

$c$  = the velocity of the light.

then

- a. The *surge voltages* are the same for all modes of the electromagnetic field, and the value of the surge voltages is about 17% of the steady state.
- b. The transient time is proportional to the square root of the length of the guide and reversely proportional to the square root of the cut-off frequency.

4. When the frequency is nearing to the cut-off frequency then the wave-front of the main wave is not sharp and the transient time is increasing in the limit case to the infinity. When the work frequency is much greater than the cut-off frequency ( $b_m = \frac{\omega}{\omega_m} \gg 1$ ) the transient time changes as  $\frac{1}{b_m}$  approximately.



J. OSIOWSKI

## Praca wzmacniacza rezonansowego klasy C z rozstrojonym obwodem anodowym

Rękopis dostarczono 9. 6. 1958

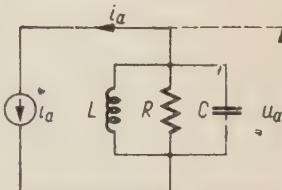
W pracy będącej kontynuacją prac [5] i [6] podano wyniki dyskusji analitycznego rozwiązania wzmacniacza klasy C pracującego z rozstrojonym obwodem anodowym. Wyniki zilustrowano wykresami.

### 1. WSTĘP

W pracy [5] podano rozwiązanie ogólne obwodu anodowego wzmacniacza rezonansowego klasy C, którego dyskusję w przypadku pracy wzmacniacza z dinstrojonym obwodem anodowym zawiera praca [6]. Niniejsza praca jest dokończeniem wspomnianej dyskusji w zakresie pracy wzmacniacza z rozstrojonym obwodem anodowym<sup>1</sup>.

Założenia dotyczące warunków pracy wzmacniacza przyjmujemy takie same, jakie przyjęte były w poprzednich publikacjach [5], [6] i jakie zostały sformułowane w [6]. Przy tych założeniach można przyjąć układ zastępczy obwodu anodowego wzmacniacza klasy C w postaci podanej na rys. 1, przy czym przebieg prądu anodowego nie zależy od napięcia anodowego i wyraża się zależnościami:

$$i_a(\omega t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \omega t \leq 0 \\ I \frac{\cos(\omega t - \Theta) - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} & ; \quad 0 \leq \omega t \leq 2\Theta \\ 0 & ; \quad 2\Theta \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases} \quad (1)$$



Rys. 1. Układ zastępczy obwodu anodowego wzmacniacza.

<sup>1</sup> Badania przebiegów w obwodzie anodowym wzmacniacza klasy C w przypadku rozstrojenia jest zagadnieniem stosunkowo mało omawianym w literaturze. Poza pewnymi wzmiankami w obszerniejszych podręcznikach ([4], [7], [8]), mającymi raczej charakter informacyjny i opartymi głównie na materiałach empirycznych, wymienić można jeszcze kilka prac ([1], [2], [3]), fragmentarnie dotyczących postawionego zagadnienia. Na przykład najobszerniejsza z wymienionych tu pozycji [1], dotyczy przypadku obwodu rezonansowego pobudzanego napięciowo impulsami

oraz

$$i_a(\omega t) = i_a(\omega t + k \cdot 2\pi); \quad 0 \leq \omega t; \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Opierając się na wynikach otrzymanych w [5] można napisać następujące rozwiązania ogólne dla składowej zmiennej napięcia anodowego:<sup>2</sup>

Zakres I.  $0 \leq \omega t' \leq 2\Theta; \quad n = 0, 1, 2 \dots \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = \frac{1}{r(1 - \cos \Theta)} \left\{ \sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \sin(\omega t' - \Theta + \beta_1 - \beta_2) + e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} [A_0 \cos r(\omega t' - \Theta) + B_0 \sin r(\omega t' - \Theta)] - e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} P_n [A \cos [r(\omega t' - \Theta) + \varphi_n - \varphi] + B \sin [r(\omega t' - \Theta) + \varphi_n - \varphi]] \right\}. \quad (2)$$

Zakres II.  $2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2 \dots \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = \frac{e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} P_n}{r(1 - \cos \Theta)} \left\{ A \cos [r(\omega t' - \Theta) + \varphi_n - \varphi] + B \sin [r(\omega t' - \Theta) + \varphi_n - \varphi] \right\}, \quad (3)$$

przy czym użyto oznaczeń:

$u_a$  — składowa zmienna napięcia anodowego,

$Q = R\omega_0 C$  — dobroć obwodu rezonansowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$  — częstotliwość własna obwodu rezonansowego,

$\omega$  — częstotliwość powtarzania impulsów prądu anodowego,

$r = \frac{\omega_0}{\omega}$  — rozstrojenie obwodu,

$I$  — wartość maksymalna impulsów prądu anodowego,

$\Theta$  — kąt odcięcia impulsów prądu anodowego (w klasie  $C$ :  $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$ ).

uzyskanymi przez kluczowanie źródła napięcia stałego. Wskutek tak przyjętych warunków pobudzania wyniki uzyskane w [1] tylko w niewielkim stopniu mogą być przystosowane do przypadku wzmacniacza z rozstrojonym obwodem anodowym i różnią się w istotny sposób od wyników niniejszej pracy.

<sup>2</sup> Zależności (2) i (3) z pracy [6] są przypadkami szczególnymi tych zależności przy  $r = \frac{\omega_0}{\omega} = k$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną (przypadek obwodu dostrojonego). Podobnie, odpowiednie wzory na współczynniki z pracy [6] są przypadkami szczególnymi podanych dalej wzorów ogólnych (5) — (12).

Zmienne  $t'$  i  $n$  są związane z czasem  $t$  zależnością:

$$\omega t = \omega t' + n \cdot 2\pi, \quad (4)$$

przy czym

$$0 \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$n$  interpretujemy jako całkowitą liczbę cykli prądu anodowego poprzedzających chwilę  $t$ .

Współczynniki występujące we wzorach (2) i (3) wyrażone są następująco:

$$\beta_1 = \operatorname{arctg} \left( 2Q \frac{r-1}{r} \right); \quad \beta_2 = \operatorname{arctg} \left( 2Q \frac{r+1}{r} \right); \quad (5)$$

$$A_0 = e^{\frac{r\theta}{Q}} \{ \cos \beta_1 \cos [(r-1)\theta - \beta_1] - \cos \beta_2 \cos [(r+1)\theta - \beta_2] \}, \quad (6)$$

$$B_0 = e^{\frac{r\theta}{Q}} \{ \cos \beta_1 \sin [(r-1)\theta - \beta_1] - \cos \beta_2 \sin [(r+1)\theta - \beta_2] \}, \quad (7)$$

$$A = A_0 - \cos \beta_1 \cos [(r-1)\theta + \beta_1] + \cos \beta_2 \cos [(r+1)\theta + \beta_2], \quad (8)$$

$$B = B_0 + \cos \beta_1 \sin [(r-1)\theta + \beta_1] - \cos \beta_2 \sin [(r+1)\theta + \beta_2], \quad (9)$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}} \sin 2\pi r}{1 - e^{-\frac{r\pi}{Q}} \cos 2\pi r}, \quad (10)$$

$$\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{e^{-(n+1)\frac{r\pi}{Q}} \sin [(n+1)2\pi r]}{1 - e^{-(n+1)\frac{r\pi}{Q}} \cos [(n+1)2\pi r]}, \quad (11)$$

$$P_n = \sqrt{\frac{1 - 2e^{-(n+1)\frac{r\pi}{Q}} \cos [(n+1)2\pi r] + e^{-2(n+1)\frac{r\pi}{Q}}}{1 - 2e^{-\frac{r\pi}{Q}} \cos 2\pi r + e^{-2\frac{r\pi}{Q}}}}. \quad (12)$$

W dalszych rozważaniach będziemy się posługiwali również postacią zespoloną tego współczynnika

$$\hat{P}_n = \frac{1 - e^{(n+1)\left(-\frac{r\pi}{Q} + j \cdot 2\pi r\right)}}{1 - e^{-\frac{r\pi}{Q}} + j \cdot 2\pi r} = P_n e^{j(\varphi_n - \varphi)}. \quad (13)$$

Zależności (2) i (3) wyznaczają rozwiązywanie w stanie nieustalonym dla kolejnych przedziałów  $0 \leq \omega t' \leq 2\pi$  o skończonych numerach  $n$ . Rozwiązywanie w stanie ustalonym w granicach jednego cyklu (tzw. cyklu ustalonego) otrzymuje się z tych zależności jako granicę (por. [5])

$$u_a(\omega t', \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_a(\omega t', n). \quad (14)$$

Ponieważ napięcie anodowe  $u_a$  zależy od  $n$  tylko za pośrednictwem funkcji  $\varphi_n$  i  $P_n$ , rozwiązanie ustalone  $u_a(\omega t', \infty)$  można więc otrzymać z wzorów (2) i (3) zastępując w nich wielkości  $\varphi_n$  i  $P_n$  ich granicami

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0, \quad (15)$$

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{-\frac{r\pi}{Q}} \cos 2\pi r + e^{-2\frac{r\pi}{Q}}}}. \quad (16)$$

Okoliczność ta pozwala traktować zależności (2) i (3) jako rozwiązania ogólne słuszne zarówno w stanie nieustalonym ( $n=0,1,2, \dots$ ), jak i w stanie ustalonym ( $n=\infty$ ).

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest przedstawienie w określonym zakresie dyskusji podanych rozwiązań (2) i (3) i przeanalizowanie wpływu trzech podstawowych parametrów pracy wzmacniacza: kąta odcięcia  $\Theta$ , dobroci obwodu  $Q$  i rozstrojenia  $r = \frac{\omega_0}{\omega}$  zarówno na przebiegi czasowe, jak i na inne parametry napięcia anodowego w stanie nieustalonym i ustalonym. Stosunek  $r = \frac{\omega_0}{\omega}$  będący miarą rozstrojenia obwodu<sup>3</sup> nabiera przy tym zasadniczego znaczenia i w dalszej dyskusji będzie uważany za parametr podstawowy. Ze względu na zasadnicze trudności jednoczesnego dyskutowania wpływu trzech parametrów, w dalszej dyskusji ograniczono się głównie do zbadania wpływu wielkości  $r$  i  $Q$  na przebiegi anodowe. Z rozważań wyłączony jest w zasadzie przypadek, gdy  $r=k$  ( $k$  — liczba naturalna), tj. przypadek pracy z dostrojonym obwodem anodowym, który w całości poświęcona była poprzednia publikacja [6].

Znaczenie techniczne przypadku pracy wzmacniacza klasy C z rozstrojonym obwodem anodowym ( $r \neq k$ ) jest oczywiście znacznie mniejsze, niż spotykanego normalnie w eksploatacji przypadku pracy z obwodem dinstrojonym. Przypadek pracy z obwodem rozstrojonym nie jest jednak pozbawiony znaczenia praktycznego; spotyka go się np. przy przestrajaniu wzmacniacza, a ma on również znaczenie przy analizie generatorów klasy C pracujących z reguły przy określonym rozstrojeniu obwodu rezonansowego. Wydaje się ponadto, iż zbadanie tego przypadku ma duże znaczenie teoretyczne, pozwala bowiem rozszerzyć i uogólnić zależności charakteryzujące wzmacniacz z obwodem dinstrojonym.

<sup>3</sup> Wielkość  $r = \frac{\omega_0}{\omega}$  mogąca przybierać dowolne wartości rzeczywiste dodatnie nazywano w niniejszej pracy rozstrojeniem, chociaż sens wielkości  $r$  niezupełnie odpowiada pojęciu rozstrojenia spotykanemu w radiotechnice.

## 2. DYSKUSJA PARAMETRÓW NAPIĘCIA ANODOWEGO W ZALEŻNOŚCI OD ROZSTROJENIA OBWODU

Zanim przejdziemy do bezpośredniej dyskusji przebiegów anodowych we wzmacniaczu z rozstrojonym obwodem anodowym, konieczne jest nieco ogólniejsze scharakteryzowanie zasadniczych zmian, jakim podlega napięcie anodowe wzmacniacza przy ciągłej zmianie stosunku  $r = \frac{\omega_0}{\omega}$ , oraz wyodrębnienie podstawowych właściwości przebiegów anodowych w poszczególnych przedziałach zmienności  $r$ .

Konieczne jest przy tym ograniczenie się do dyskusji pośredniej, tj. wnioskowania o właściwościach napięcia anodowego na podstawie zbadania zależności jego podstawowych parametrów od rozstrojenia obwodu.

### 2.1. Wpływ rozstrojenia obwodu na kształtowanie się napięcia anodowego w stanie nieustalonym

Rozstrojenie obwodu anodowego wywiera zasadniczy wpływ na proces ustalania się napięcia anodowego. W przypadku dostrojenia (por. [6]) obwód anodowy jest pobudzany impulsami prądu synchronicznie — każdy impuls prądowy z osobna wywołuje reakcję obwodu będącą „w fazie” z reakcjami wywołanymi przez wszystkie poprzednie impulsy. W efekcie kolejne impulsy prądu wywołują monotoniczny wzrost amplitudy drgania nie zmieniając jego fazy, która w poszczególnych cyklach łącznie z cyklem ustalonym jest identyczna (tj.  $\varphi_n = \varphi = 0$ , por. [6]).

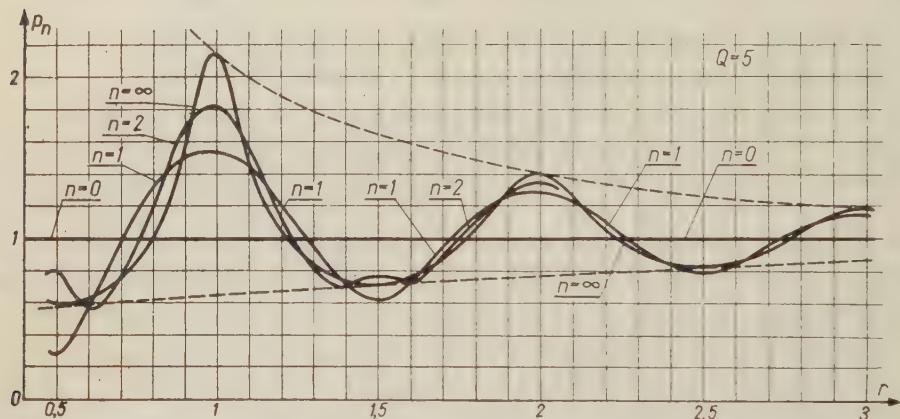
Inny obraz ustalania się napięcia anodowego otrzymujemy przy rozstrojonym obwodzie anodowym. W tym przypadku zależności fazowe między reakcjami obwodu na poszczególne impulsy prądu mogą być różnorodne i zależą od wielkości  $r$ . Fazy te mogą się kształtować np. tak, że kolejne impulsy prądu będą zmniejszać amplitudę drgania względnie amplituda ta może zmieniać się niemonotonicznie (por. uwagi i wykresy podane w rozdz. 4). Przesunięcia fazowe w poszczególnych cyklach są teraz, ogólnie biorąc, różne i inne niż w cyklu ustalonym.

Ponieważ przebieg napięcia anodowego w poszczególnych cyklach zależy od  $n$ , to jest kolejnego numeru cyklu tylko za pośrednictwem współczynnika  $\tilde{P}_n$  (lub jego modułu  $P_n$  i fazy  $\varphi_n - \varphi$  por. wzór [13]). Dyskusja tego współczynnika ma zasadnicze znaczenie dla scharakteryzowania procesu ustalania się napięcia anodowego oraz ustalenia wzajemnej relacji między przebiegami w stanie nieustalonym i ustalonym.

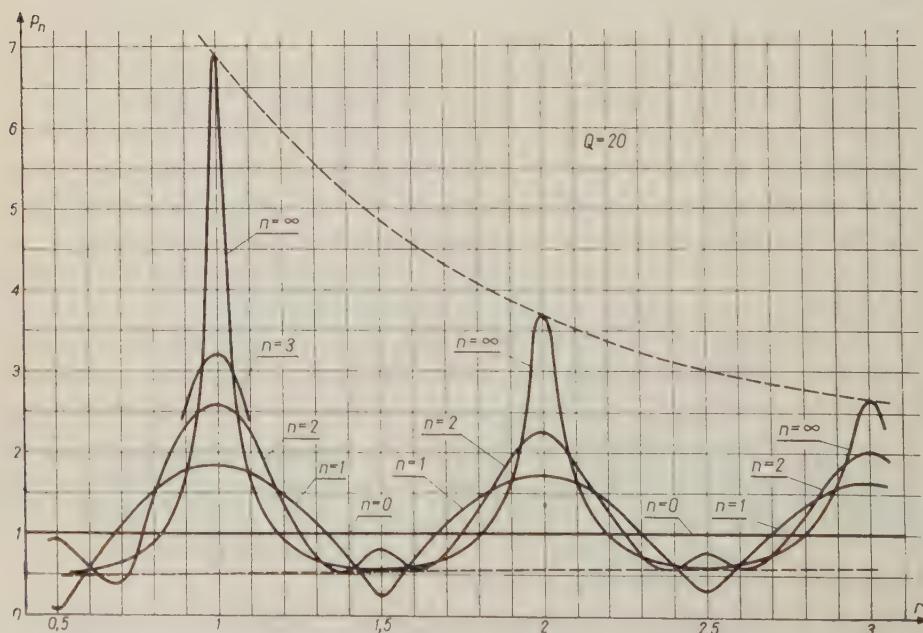
### 2.2. Zależności amplitudowe

Na rys. 2 i 3 pokazano wykresy modułu  $P_n$  oraz  $P_\infty$  w funkcji  $r$  przy dwóch wartościach dobroci:  $Q=5$  i  $Q=20$ . Wykresy te pozwalają na zorientowanie się w zależnościach amplitudowych w poszczególnych

cyklach i porównanie ich z przypadkiem dostrojenia. Przy  $n=0$  (a więc w cyklu początkowym) jest  $\hat{P}_0 = P_0 = 1$ . Jak wynika z rys. 2 i 3 w pewnych przedziałach zmienności  $r$  jest  $P_\infty > 1$ , w innych  $P_\infty < 1$ , a więc odpowiednio istnieją przedziały, w których napięcie anodowe w cyklu ustalonym ma amplitudę większą, w innych zaś mniejszą od amplitudy



Rys. 2. Wykresy  $P_n$  w funkcji  $r$  w stanie nieustalonym ( $n=0, 1, 2$ ) i ustalonym ( $n=\infty$ ) przy  $Q=5$ .



Rys. 3. Wykresy  $P_n$  w funkcji  $r$  w stanie nieustalonym ( $n=0, 1, 2, 3$ ) i ustalonym ( $n=\infty$ ) przy  $Q=20$ .

organia wywołanego pierwszym impulsem prądu<sup>4</sup>. Wartości  $r$  rozdzielające te przedziały spełniają równanie

$$P_{\infty} = 1 \quad (17)$$

lub

$$1 - 2e^{-\frac{r\pi}{Q}} \cos 2\pi r + e^{-2\frac{r\pi}{Q}} = 1. \quad (18)$$

Oznaczając pierwiastki tego równania przez  $r_k$  otrzymujemy

$$\cos 2\pi r_k = \frac{1}{2} e^{-\frac{r_k \pi}{Q}}$$

lub

$$2\pi r_k = \pm \arccos \frac{e^{-\frac{r_k \pi}{Q}}}{2} + k \cdot 2\pi.$$

Uwzględniając, że  $r > 0$ , dostajemy ciąg pierwiastków, którego pierwszy wyraz  $r_0$  spełnia równanie

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{e^{-\frac{r_0 \pi}{Q}}}{2} \quad (19)$$

oraz dalsze wyrazy

$$r_k = k \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{e^{-\frac{r_k \pi}{Q}}}{2}, \quad (20)$$

przy czym każdej liczbie naturalnej  $k$  odpowiadają dwie wartości  $r_k$ , które są rozzielone liczbą  $k$ . Oznaczamy je odpowiednio:

$r_{kp}$  i  $r_{kl}$ , przy czym  $r_{kp} > k$  (znak plus we wzorze [20]) oraz  $r_{kl} < k$  (znak minus we wzorze [20]).

Wartości określone wzorami (19) i (20) można łatwo oszacować. Ponieważ

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}}}{2} = 0 < \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}}}{2} < \frac{1}{2} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}}}{2}$$

oraz

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{Q \rightarrow \infty} \arccos \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}}}{2} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}}}{2} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi} \lim_{Q \rightarrow 0} \arccos \frac{e^{-\frac{r\pi}{Q}}}{2}$$

<sup>4</sup> Ścisłe odnosi się to tylko do zakresu II — patr. [6].

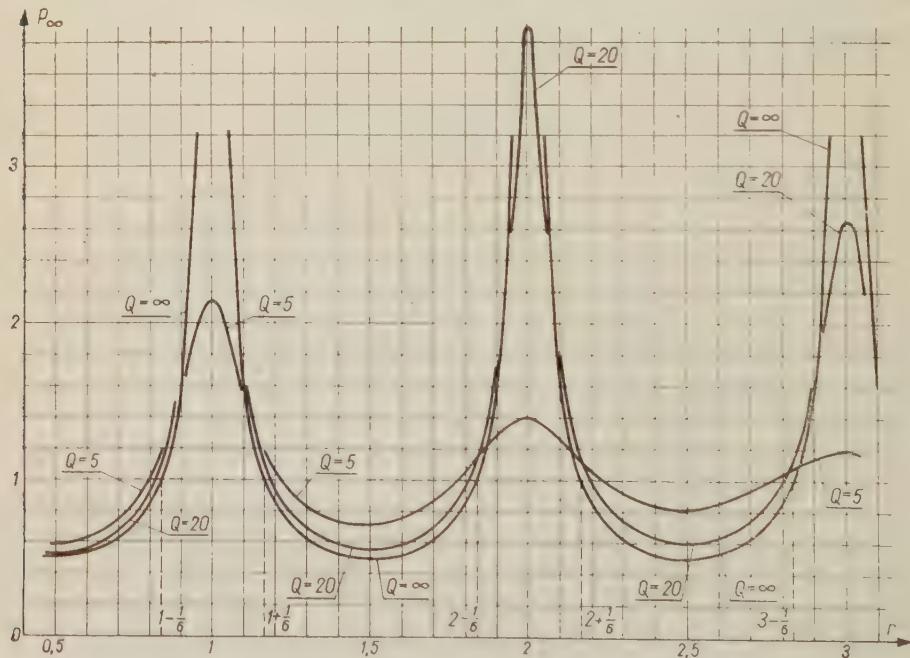
wynikają stąd następujące oszacowania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6} < r_0 < \frac{1}{4} \\ k + \frac{1}{6} < r_{kp} < k + \frac{1}{4} \\ k - \frac{1}{4} < r_{kl} < k - \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

oraz wartości graniczne<sup>5</sup>

$$\lim_{Q \rightarrow 0} r_k = k \pm \frac{1}{4}; \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} r_k = k \pm \frac{1}{6}. \quad (22)$$

Na rys. 4 pokazano dla porównania wykresy współczynnika  $P_\infty$  w funkcji  $r$  przy różnych wartościach  $Q$  oraz w przypadku granicznym  $Q=\infty$ . Sposób otrzymania krzywej granicznej (jak również analogicznej krzywej na rys. 8) omówiony jest w rozdz. 3.



Rys. 4. Wykresy współczynnika  $P_\infty$  w funkcji  $r$  przy różnych wartościach dobroci  $Q$ .

Na rysunku 5 podano wykresy zależności  $r_{kp}$  i  $r_{kl}$  od dobroci  $Q$ . Charakter zależności  $r_{kp}$  i  $r_{kl}$  przy większych wartościach  $k$  jest taki sam.

<sup>5</sup> Znak plus odpowiada  $r_{kp}$ , znak minus odpowiada  $r_{kl}$ ;  $r_0$  należy traktować jako  $r_{0p}$ .

Jak wynika z poprzednich rozważań, dla wartości  $r$  w przedziałach  $r_{kl} < r < r_{kp}$ <sup>6</sup> amplituda w cyklu ustalonym jest większa niż w cyklu początkowym, a więc napięcie anodowe narasta. Nic na tej podstawie nie można jednak powiedzieć o charakterze tego narastania. Jak wiadomo (por. np. [6]), przy  $r=k$  (obwód dostrojony) wartości  $P_n$  rosną monotonicznie ze wzrostem  $n$ , jednak, jak wynika to z wykresów podanych na rys. 2 i 3, ma to miejsce nie dla wszystkich wartości  $r$  z przedziałów  $r_{kl} < r < r_{kp}$  (por. rys. 15, 17, 19 i 21).

Długości przedziałów  $r_{kl} < r < r_{kp}$  wahają się w zależności od dobroci  $Q$  w granicach od  $\frac{1}{3}$  (przypadek graniczny  $Q=\infty$ ; por. rys. 4) do  $\frac{1}{2}$

(przypadek graniczny  $Q=0$ ). Zwiększenie się tych długości przy zmniejszaniu się dobroci wynika stąd, że gorszy obwód w szerszym pasmie częstotliwości zachowuje się podobnie jak w rezonansie, a więc w szerszym zakresie częstotliwości występuje narastanie napięcia anodowego.

Interesujące jest jeszcze zagadnienie ekstremów i wartości ekstremalnych współczynnika  $P_\infty$ . Przy  $r=k$  mamy

$$P_\infty = \left. \frac{1}{1 - e^{-\frac{r\pi}{Q}}} \right|_{r=k} \quad (23)$$

oraz przy  $r=k - \frac{1}{2}$ <sup>7</sup>;

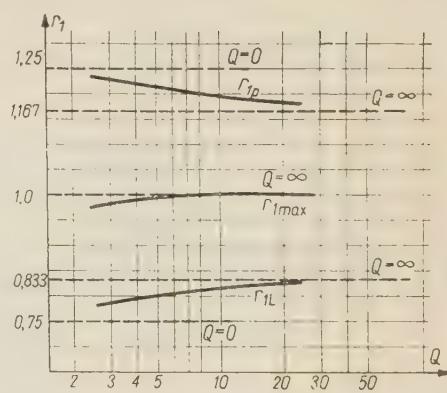
$$P_\infty = \left. \frac{1}{1 + e^{-\frac{r\pi}{Q}}} \right|_{r=k - \frac{1}{2}}. \quad (24)$$

<sup>6</sup> Przedziały te są niemal symetryczne względem liczb  $k$ ; przedziałem  $0 < r < r_0$  zajmować się nie będziemy.

<sup>7</sup> Przypadek  $r=k - \frac{1}{2}$  jest interesujący i warto nań zwrócić uwagę. Przy  $r=k - \frac{1}{2}$  mamy bowiem

$$P_n = \left. \frac{1 + (-1)^n e^{-\frac{(n+1)r\pi}{Q}}}{1 + e^{-\frac{r\pi}{Q}}} \right|_{r=k - \frac{1}{2}}$$

z więc największą wartość osiąga  $P_n$  w cyklu początkowym przy  $n=0$  ( $P_0=1$ ), a następnie wartości  $P_n$  przy dalszych  $n$  oscylują wokół wartości  $P_\infty < 1$  określonej wzorem (24) (wartości  $P_{2v}$  maleją, wartości  $P_{2v+1}$  rosną;  $v=0,1,2\dots$ ).



Rys. 5. Wykresy wartości  $r_{1p}$ ,  $r_n$  oraz  $r_{1max}$  w funkcji  $Q$ .

Punkty  $r=k$  i  $r=k-1$  są bardzo zbliżone do wartości, przy których występują ekstrema  $P_\infty$  (odpowiednio maksima i minima), a wartości (23) i (24) — bardzo zbliżone do wartości ekstremalnych. Jednocześnie prawe strony wzorów (23) i (24) stanowią wielkości ograniczające od góry i dołu cały przebieg współczynnika  $P_\infty$ , tzn. dla każdego  $r$  zachodzi nierówność<sup>8</sup>

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{r\pi}{Q}}} \leq P_\infty \leq \frac{1}{1-e^{-\frac{r\pi}{Q}}}. \quad (25)$$

Dokładne wartości, przy których występują ekstrema, różnią się nieco od podanych powyżej wartości  $r=k$  i  $r=k-1$ . Z równania

$$\frac{\partial P_\infty}{\partial r} = 0$$

dostajemy

$$\sin(2\pi r - \alpha_0) = -e^{-\frac{r\pi}{Q}} \sin \alpha_0,$$

a stąd dwa równania:

$$2\pi r - \alpha_0 = -\arcsin\left(e^{-\frac{r\pi}{Q}} \sin \alpha_0\right) + k \cdot 2\pi,$$

$$2\pi r - \alpha_0 = -\pi + \arcsin\left(e^{-\frac{r\pi}{Q}} \sin \alpha_0\right) + k \cdot 2\pi,$$

gdzie

$$\alpha_0 = -\arctg \frac{1}{2Q}.$$

Uwzględniając, że  $r > 0$  oraz oznaczając kolejne wartości  $r$ , przy których występują maksima — przez  $r_{k\max}$  i minima — przez  $r_{k\min}$ , otrzymujemy równania, jakie spełniają te wartości

$$r_{k\max} = k + \frac{1}{2\pi} \left[ \alpha_0 - \arcsin\left(e^{-\frac{\pi}{Q}r_{k\max}} \sin \alpha_0\right) \right], \quad (26)$$

$$r_{k\min} = k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \left[ \alpha_0 + \arcsin\left(e^{-\frac{\pi}{Q}r_{k\min}} \sin \alpha_0\right) \right]. \quad (27)$$

Ponieważ

$$\alpha_0 < 0$$

oraz

$$\left| \arcsin\left(e^{-\frac{r\pi}{Q}} \sin \alpha_0\right) \right| < |\alpha_0|,$$

<sup>8</sup> Wykresami wyrażeń ograniczających współczynnik  $P_\infty$  są odpowiednie krzywe przerywane na rys. 2 i 3.

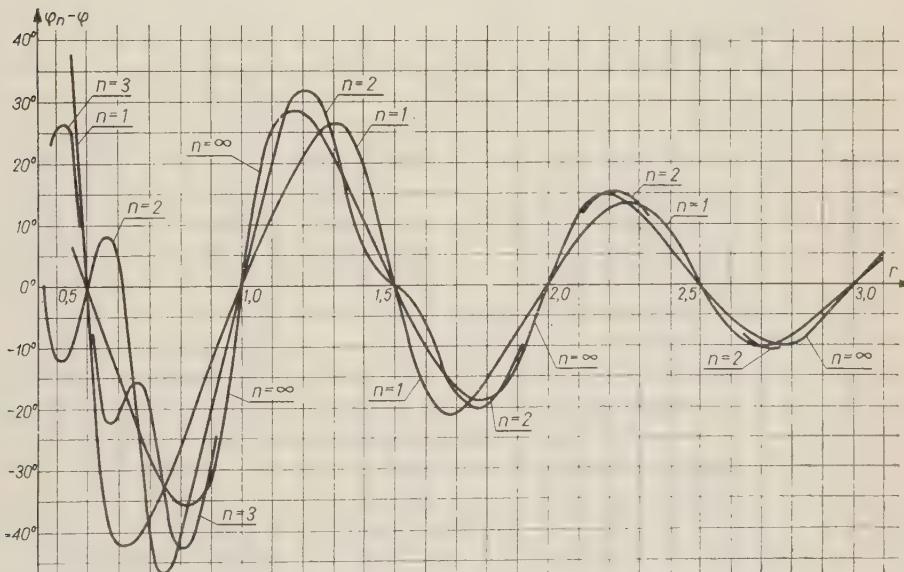
wobec tego wartość  $r_{k\max}$  jest nieco mniejsza od  $k$  oraz  $r_{k\min}$  jest mniejsza od  $k - \frac{1}{2}$ . Dla normalnie spotykanych wartości dobroci  $Q$  różnice między tymi wartościami (szczególnie różnica  $k - r_{k\max}$ ) są niewielkie i szybko maleją do zera ze wzrostem  $Q$  (por. rys. 4). Dla przykładu pokazano na rys. 5 wykres  $r_{1\max}$  w funkcji  $Q$ .

### 2.3. Zależności fazowe

Zależności amplitudowe omówione w poprzednim paragrafie nie dają pełnego obrazu ustalania się napięcia anodowego z uwagi na różne fazy przebiegów w poszczególnych cyklach. Zależności fazowe są o tyle skomplikowane, że szczególnie w przypadku obwodów o dużej dobroci niewielkie rozstrojenia mogą wywołać bardzo duże zmiany fazy.

Na rysunku 6 i 7 pokazano zależność kąta fazowego

$$\varphi_n - \varphi = \operatorname{Arg} \hat{P}_n$$



Rys. 6. Wykresy kąta  $\varphi_n - \varphi = \operatorname{Arg} \hat{P}_n$  w funkcji  $r$  przy  $Q=5$  dla kilku cykli stanu nieustalonego ( $n=1, 2, 3$ ) i dla cyklu ustalonego ( $n=\infty$ ).

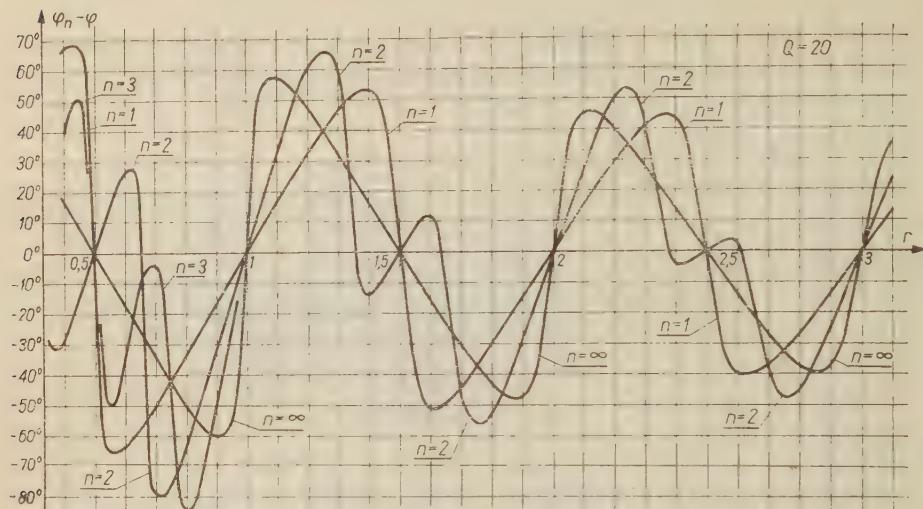
od rozstrojenia  $r$  dla kilku cykli stanu nieustalonego ( $n=1, 2, 3$ ) oraz dla cyklu ustalonego ( $n=\infty$ ). Wykresy te ilustrują zmiany fazy napięcia anodowego w poszczególnych cyklach<sup>9</sup> w zależności od  $r$ . Jak wynika z (10) i (11), w cyklu początkowym ( $n=0$ ) mamy

$$\varphi_0 - \varphi = 0,$$

<sup>9</sup> Podobnie, jak i w poprzednim paragrafie, chodzi tu o scharakteryzowanie zmian, jakie zachodzą między przebiegami w poszczególnych cyklach i dlatego

a w cyklu ustalonym — wobec zależności  $\varphi_\infty = 0$  jest

$$\varphi_\infty - \varphi = -\varphi.$$



Rys. 7. Wykresy kąta  $\varphi_n - \varphi = \text{Arg } P_n$  w funkcji  $r$  przy  $Q=20$  dla kilku cykli stanu nieustalonego ( $n=1, 2, 3$ ) i dla cyklu ustalonego ( $n=\infty$ ).

Na rys. 8 podano wykresy kąta  $\varphi$  (przypominamy, że  $\text{Arg } \hat{P}_\infty = -\varphi$ ) w funkcji  $r$  przy różnych wartościach dobroci  $Q$ . Jak wynika z porównania wzorów (10) i (11), są to jednocześnie wykresy kątów  $\varphi_n$  przy odpowiedniej zamianie zmiennej niezależnej z  $r$  na  $(n+1)r$ .

O ile zależność fazy  $\varphi$  cyklu ustalonego od rozstrojenia  $r$  jest dosyć regularna i łatwa do uchwycenia (rys. 8), o tyle zależności fazowe w stanie nieustalonym są znacznie bardziej skomplikowane (rys. 6 i 7) dobrze charakteryzuje złożony proces ustalania się napięcia anodowego przy rozstrojonym obwodzie anodowym.

Jak wiadomo, przy dostrojonym obwodzie ( $r=k$ ) fazy we wszystkich cyklach łącznie z cyklem ustalonym są jednakowe (por. [6]), przy czym

$$\varphi_n = \varphi = 0. \quad (28)$$

Jest rzeczą interesującą, iż związki (28) zachodzą również dla przypadku, gdy  $r = k - \frac{1}{2}$  (por. przypis 7 na str. 701).

Jeżeli  $\varphi_n = 0$  dla danego  $n$  i  $r$ , to  $\varphi_n - \varphi = -\varphi$ , a więc w cyklu tym faza

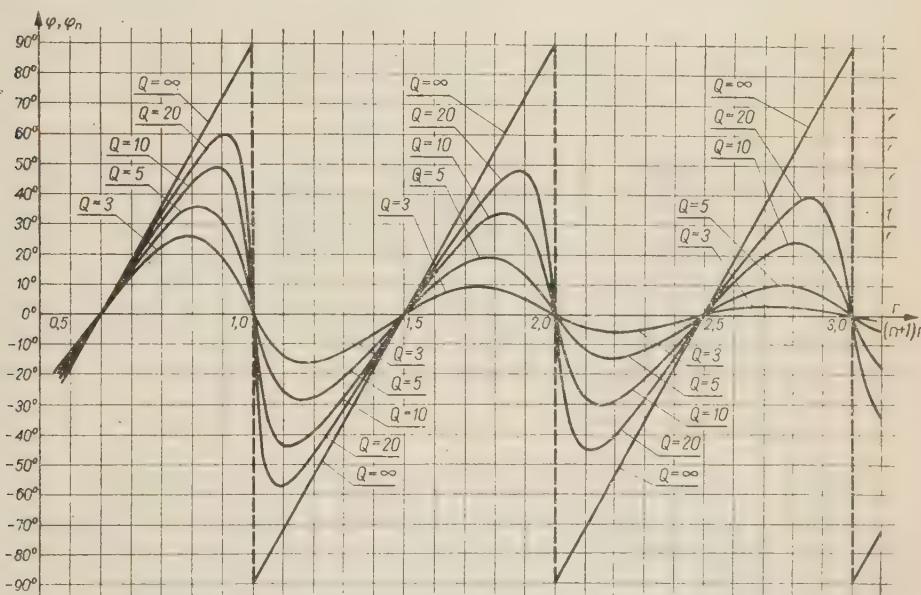
w rozważaniach uwzględniano tylko wielkości zmieniające się wraz z  $n$ . Jak wynika z zależności (3), wielkość  $\varphi_n - \varphi$  nie określa całkowitego przesunięcia fazowego przebiegu, podobnie jak  $P_n$  nie jest jedynym czynnikiem wpływającym na amplitudę.

jest taka sama, jak w cyklu ustalonym. Jak wynika z (11), ma to miejsce wówczas gdy

$$a \text{ więc } (n+1)2\pi r = k\pi,$$

$$r = \frac{k}{2(n+1)}, \quad (29)$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą naturalną. Wynika stąd, że im późniejszy jest cykl (większe  $n$ ), tym gęściej rozłożone są punkty równości fazy z fazą cyklu ustalonego.



Rys. 8. Wykresy kąta  $\varphi$  i  $\varphi_n$  w funkcji  $r$  względnie  $(n+1)r$  przy różnych wartościach dobroci  $Q$ .

Rozważania dotyczące modułu  $P_n$  i argumentu  $\varphi_n - \varphi$  współczynnika  $\hat{P}_n$  można połączyć razem rozpatrując wykresy parametryczne (amplitudowo-fazowe)  $\hat{P}_n$ .

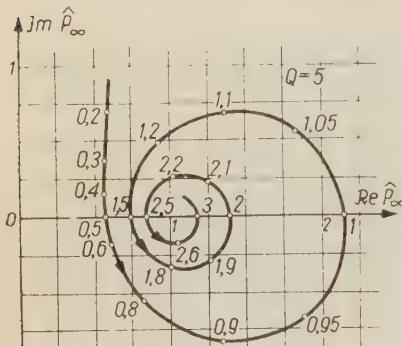
Na rys. 9 i 10 pokazano przykładowo wykresy parametryczne  $\hat{P}_\infty$  przy  $Q=5$  i  $Q=20$ , przy czym parametrem jest tu rozstrojenie  $r$  (liczby na wykresach odpowiadają wartościami  $r$  w odpowiednich punktach). Wykresy te mają postać spirali nawijających się ze wzrostem  $r$  na punkt  $1+j0$ , co wynika z zależności granicznej

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{P}_\infty = 1. \quad (30)$$

Przy  $r \rightarrow 0$  mamy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \hat{P}_\infty = \infty, \quad (31)$$

przy czym  $\text{Arg } \hat{P}_\infty$  dąży do  $\frac{\pi}{2}$ , a więc wykresy zbliżają się asymptotycznie do dodatniej półosi urojonej.

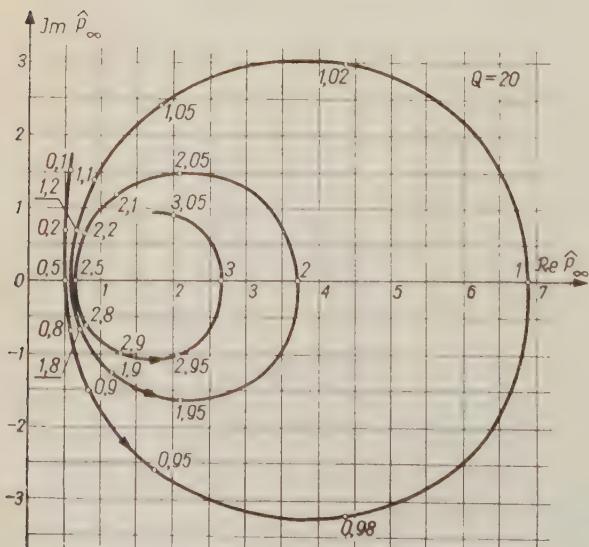


Rys. 9. Wykres parametryczny  $\hat{P}_\infty$  przy  $Q=5$ .

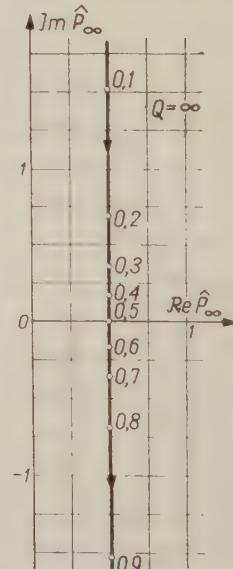
Na rysunku 11 podano wykres parametryczny współczynnika  $\hat{P}_\infty$  w przypadku granicznym  $Q = \infty$  (por. wykresy na rys. 4 i 8). Z uwagi na istnienie punktów nieograniczenia przy  $r=k$  wykres ten ma zupełnie inny charakter niż analogiczne wykresy przy skończonych wartościach dobroci  $Q$ . Jak to wynika z rozważań podanych

Analogicznie można rozpatrywać wykresy parametryczne  $\hat{P}_n$  z tym, że dla  $n \geq 2$  odpowiednie spirale mają przebieg bardziej skomplikowany (dodatkowe pętle odpowiadające dodatkowym ekstremum fazy i modułu (porównaj rys. 2, 3, 7 i 8). Punktem asymptotycznym przy  $r \rightarrow \infty$  tych spirali jest również punkt  $1+j0$ .

Na rysunku 11 podano wykres parametryczny współczynnika  $\hat{P}_\infty$  w przypadku granicznym  $Q = \infty$  (por. wykresy na rys. 4 i 8). Z uwagi na istnienie punktów nieograniczenia przy  $r=k$  wykres ten ma zupełnie inny charakter niż analogiczne wykresy przy skończonych wartościach dobroci  $Q$ . Jak to wynika z rozważań podanych



Rys. 10. Wykres parametryczny  $\hat{P}_\infty$  przy  $Q=20$ .



Rys. 11. Wykres parametryczny  $\hat{P}_\infty$  w przypadku granicznym  $Q = \infty$ .

w rozdz. 3, wykres ten jest prostą o równaniu  $\Re \hat{P}_\infty = \frac{1}{2}$ , przy czym przy zmianie parametru  $r$  od  $k$  do  $k+1$  punkt bieżący przebiega każdorazowo całą prostą od góry do dołu (zaznaczone na wykresie punkty odpowiadają więc również wartościom  $r$  otrzymanym przez dodanie liczby naturalnej  $k$ ).

#### 2.4. Parametry stanu ustalonego

Zgodnie ze wzorem (3) napięcie anodowe w stanie ustalonym w zakresie II można przedstawić w postaci zależności

$$2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi; n = \infty$$

$$\frac{u_a(\omega t', \infty)}{RI} = E_\infty e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} \cos [r(\omega t' - \Theta) - (\pi + \alpha + \varphi)], \quad (32)$$

gdzie

$$E_\infty = \frac{P_\infty \sqrt{A^2 + B^2}}{r(1 - \cos \Theta)}; \quad \cos a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin a = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (33)$$

a więc wyraża się ono przebiegiem kosinusoidalnym tłumionym wykładniczo o amplitudzie chwilowej

$$E_\infty e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} \quad (34)$$

i przesunięciu (opóźnieniu) fazowym  $\pi + \alpha + \varphi$  względem przebiegu  $\cos r(\omega t' - \Theta)$ .

Dla zobrazowania wpływu rozstrojenia obwodu na amplitudę napięcia anodowego wprowadzamy pojęcia amplitudy początkowej  $U_{ap}$  i amplitudy końcowej  $U_{ak}$  określonych (por. [6], przypadek obwodu dostonionego) jako wartości amplitudy chwilowej (34) na początku i końcu zakresu II w cyklu ustalonym, to znaczy

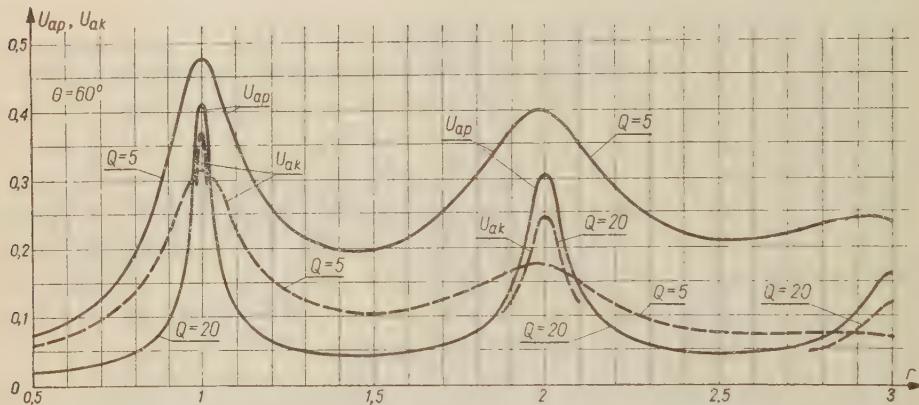
$$U_{ap} = E_\infty e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} \Big|_{\omega t' = 2\Theta} = E_\infty e^{-\frac{r\Theta}{Q}}, \quad (35)$$

$$U_{ak} = E_\infty e^{-\frac{r\omega t'}{2Q}} \Big|_{\omega t' = 2\pi} = E_\infty e^{-\frac{r\pi}{Q}}. \quad (36)$$

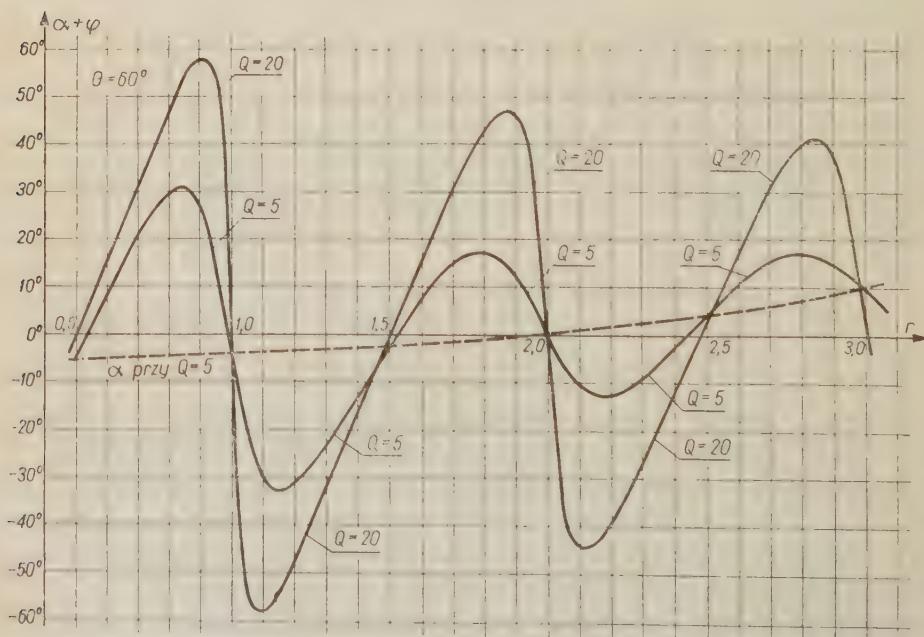
Na rys. 12 podano wykresy wielkości  $U_{ap}$  i  $U_{ak}$  w zależności od rozstrojenia  $r$  przy dwóch wartościach dobroci  $Q=5$  i  $Q=20$ , a na rys. 13 podano analogiczne wykresy dodatkowego przesunięcia fazowego  $\alpha + \varphi$  dla tych samych wartości dobroci. Linią przerywaną podano wykres samego kąta  $\alpha$  przy  $Q=5$  (przy  $Q=20$  w rozpatrywanym zakresie zmienności  $r$  zależność  $\alpha$  od  $r$  ma analogiczny charakter z tym, że  $|\alpha| \leq 2^{\circ}30'$ ).

Należy zaznaczyć, iż wprowadzone parametry: amplituda początkowa i końcowa oraz dodatkowe przesunięcie fazowe nie dają w przypadku rozstrojonego obwodu anodowego tak dokładnego obrazu przebiegu usta-

lonego napięcia anodowego jak to ma miejsce przy obwodzie dostrojonym (por. [6]). Jest to związane z tym, że przy rozstrojonym obwodzie przebieg napięcia ustalonego w zakresie I może dość znacznie różnić się od scharakteryzowanego przez parametry  $U_{ap}$  i  $U_{ak}$  oraz  $\alpha + \varphi$  przebiegu w zakresie II (por. wykresy napięcia anodowego podane w rozdz. 4).



Rys. 12. Wykresy amplitudy początkowej  $U_{ap}$  i amplitudy końcowej  $U_{ak}$  napięcia anodowego w stanie ustalonym w zależności od rozstrojenia obwodu.



Rys. 13. Wykresy dodatkowego przesunięcia fazowego  $\alpha + \varphi$  napięcia anodowego w stanie ustalonym w zależności od rozstrojenia obwodu.

3. ROZWIĄZANIA GRANICZNE PRZY  $Q=\infty$ 

Przypadek graniczny dobroci nieskończenie wielkiej  $Q=\infty$  odpowiada przypadkowi, gdy  $R=\infty$  (por. rys. 1), a więc obwodowi idealnemu  $LC$ . Biorąc granice zależności (2) i (3) przy  $Q \rightarrow \infty$  dostajemy dla  $0 \leq \omega t' \leq 2\pi$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{U_a(\omega t', n)}{RI} = 0, \quad (37)$$

przy czym w przypadku obwodu rozstrojonego ( $r \neq k$ ) zależność ta jest słuszna zarówno w stanie nieustalonym ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), jak i w stanie ustalonym ( $n=\infty$ ). Wynika to stąd, że przy rozstrojonym obwodzie nie zachodzi zjawisko rezonansu z żadną z harmonicznych prądu anodowego i w związku z tym przebieg graniczny napięcia anodowego ustalonego przy  $Q \rightarrow \infty$  jest ograniczony, co wobec tego, że  $R \rightarrow \infty$  prowadzi do zależności (37) również i przy  $n=\infty$ <sup>10</sup>.

Aby otrzymać rozwiązania graniczne, należy więc przed przejściem do granicy przy  $Q \rightarrow \infty$  pomnożyć obie strony równości (2) i (3) przez wielkość proporcjonalną do  $R$ , np. przez

$$R\omega C = \frac{Q}{r}. \quad (38)$$

Mnożąc stronami zależności (2) i (3) przez (38) oraz uwzględniając, że przy  $r \neq k$  i  $n \neq \infty$  mamy

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \hat{P}_n = \lim_{Q \rightarrow \infty} P_n e^{j(\varphi_n - \varphi)} = \frac{\sin(n+1)\pi r}{\sin \pi r} e^{jn\pi r}, \quad (39)$$

otrzymujemy po przekształceniach w granicy przy  $Q \rightarrow \infty$  rozwiązania graniczne dla stanu niewielkiego w postaci:

Zakres I.  $0 \leq \omega t' \leq 2\Theta$ ;  $n=0,1,2\dots$

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{U_a(\omega t', n)}{I/\omega C} &= \frac{1}{r(r^2-1)(1-\cos\Theta)} \left[ r \sin(\omega t' - \Theta) - \right. \\ &\quad - r \sin \Theta \cos r(\omega t' - 2\Theta) - \cos \Theta \sin r(\omega t' - 2\Theta) - \\ &\quad \left. - 2 \frac{\sin(n+1)\pi r}{\sin \pi r} (\sin r\Theta \cos \Theta - r \cos r\Theta \sin \Theta) \cos r(\omega t' - \Theta + n\pi) \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Przy dostrojonym obwodzie anodowym, tj. przy  $r=k$ , zależność (37) jest słuszna tylko w stanie nieustalonym, natomiast przy  $n=\infty$  mamy:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{U_a(\omega t', \infty)}{RI} \neq 0$$

co jest związane z dostrojeniem obwodu do rezonansu z  $k$ -tą harmoniczną prądu anodowego (por. [6], rozdz. 2.2).

Zakres II.  $2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi$ ;  $n=0,1,2\dots$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{U_a(\omega t', n)}{I/\omega C} = -2 \frac{\sin r\Theta \cos \Theta - r \cos r\Theta \sin \Theta}{r(r^2-1)(1-\cos \Theta)} \cdot \frac{\sin(n+1)\pi r}{\sin \pi r} \cos r(\omega t' - \Theta + n\pi). \quad (41)$$

Przy  $n \rightarrow \infty$  rozwiązań (40) i (41) granicy nie mają, chociaż są ograniczone. Rozwiązań granicznych dla stanu ustalonego ( $n=\infty$ ) można jednak otrzymać jako granice przy  $Q \rightarrow \infty$  rozwiązań dla stanu ustalonego przy skończonej dobroci (por. podobny przypadek dla obwodu dastrojonego rozpatrzony w [6]).

Uwzględniając teraz, że<sup>11</sup>

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \hat{P}_\infty = \lim_{Q \rightarrow \infty} P_\infty e^{-j\varphi} = \frac{1}{2 \sin \pi r} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} \pi r\right)} = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \pi r \quad (42)$$

dstajemy po analogicznych, jak poprzednio, przekształceniach rozwiązania graniczne dla stanu ustalonego w postaci zależności ( $r \neq k$ ,  $n=\infty$ ):

Zakres I.  $0 \leq \omega t' \leq 2\Theta$ ;  $n=\infty$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{U_a(\omega t', \infty)}{I/\omega C} = \frac{1}{r(r^2-1)(1-\cos \Theta)} \left[ r \sin(\omega t' - \Theta) - \right. \\ \left. - r \sin \Theta \cos r(\omega t' - 2\Theta) - \cos \Theta \sin r(\omega t' - 2\Theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \pi r} (\sin r\Theta \cos \Theta - r \cos r\Theta \sin \Theta) \sin r(\omega t' - \Theta - \pi) \right]. \quad (43)$$

Zakres II.  $2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi$ ;  $n=\infty$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{U_a(\omega t', \infty)}{I/\omega C} = \frac{\sin r\Theta \cos \Theta - r \cos r\Theta \sin \Theta}{r(r^2-1)(1-\cos \Theta) \sin \pi r} \sin r(\omega t' - \Theta - \pi). \quad (44)$$

Na rys. 14 pokazano wykresy napięcia anodowego ustalonego w przypadku granicznym  $Q=\infty$  przy kilku zbliżonych do jedności wartościach parametru  $r$ .

Zależność (42) można przepisać w postaci

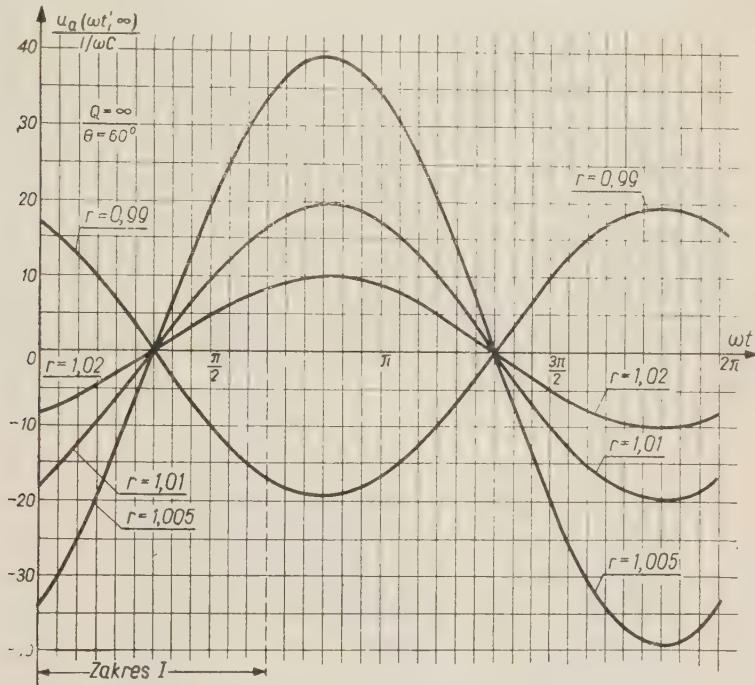
$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \hat{P}_\infty = \frac{1}{2 |\sin \pi r|} e^{-j\pi \left[ r - \frac{1}{2} - E(r) \right]}, \quad (45)$$

<sup>11</sup> Wykres parametryczny współczynnika  $\hat{P}_\infty$  w przypadku granicznym  $Q=\infty$  stanowi prosta  $\Re \hat{P}_\infty = \frac{1}{2}$ , co przedstawiono na rys. 11.

gdzie  $E(r)$  oznacza część całkowitą  $r$ , a zatem otrzymujemy<sup>12</sup>

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} P_{\infty} = \frac{1}{2 |\sin \pi r|}; \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} \varphi = \pi \left[ r - \frac{1}{2} - E(r) \right]. \quad (46)$$

Wykresy zależności (46) podano już na rys. 4 i 8.



Rys. 14. Wykresy napięcia anodowego ustalonego w przypadku granicznym  $Q = \infty$ .

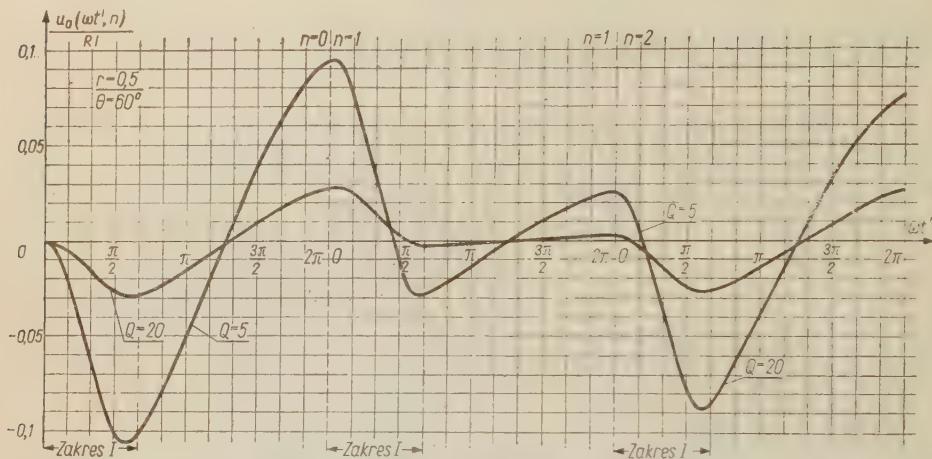
#### 4. PRZEBIEGI NAPIĘCIA ANODOWEGO W STANIE NIEUSTALONYM I USTALONYM PRZY WYBRANYCH WARTOŚCIACH ROZSTROJENIA

Jest rzeczą oczywistą, że prześledzenie, w jaki sposób przebiegi napięcia anodowego w czasie zmieniają się przy ciągłej zmianie  $r$ , jest praktycznie niewykonalne metodami analitycznymi. W paragrafie tym ograniczymy się więc tylko do podania i zanalizowania przebiegów napięcia anodowego przy kilku wybranych wartościach  $r$ .

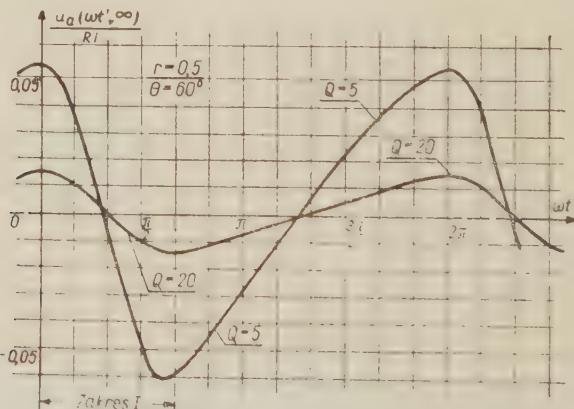
Na rys. 15, 17, 19 i 21 pokazano wykresy napięcia anodowego w ciągu trzech początkowych cykli stanu nieustalonego ( $n = 0, 1, 2$ ) dla czterech

<sup>12</sup> Zależności (46) można otrzymać również bezpośrednio obliczając granice przy  $Q \rightarrow \infty$  wyrażeń (16) i (10).

wartości rozstrojenia:  $r=0,5$ ,  $r=0,8$ ,  $r=1,1$ ,  $r=1,4$ . Na rys. 16, 18, 20 i 22 podano analogiczne wykresy dla stanu ustalonego<sup>13</sup> pozwalające na porównanie przebiegów nieustalonych i ustalonych.



Rys. 15. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym przy  $r=0,5$ .



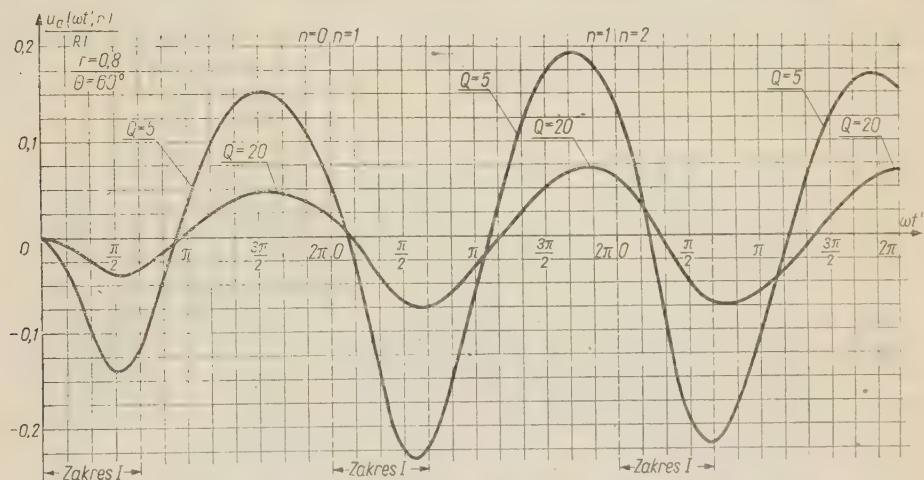
Rys. 16. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy  $r=0.5$ .

Analizując poszczególne przebiegi napięcia anodowego przy różnych rozstrojeniach obwodu można wysnuć kilka wniosków i uwag ogólnych

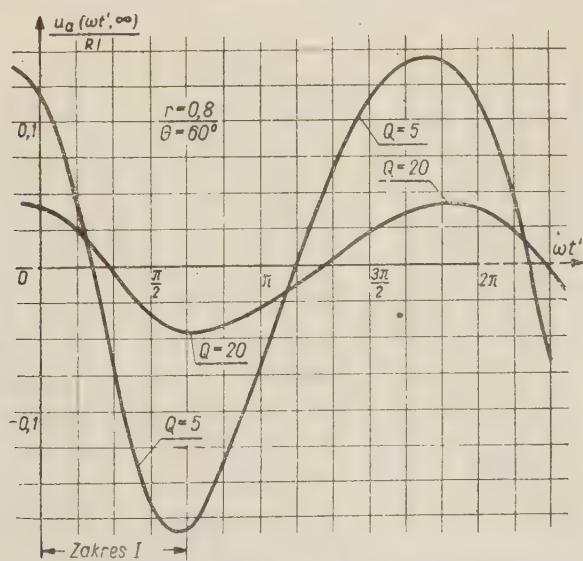
Mimo, iż każdy przebieg napięcia anodowego jest formalnie wynikiem superpozycji przebiegów o tym samym charakterze (przebieg sinusoidalny

<sup>13</sup> Wszystkie wykresy podane są dla dwóch wartości dobroci  $Q=5$  i  $Q=20$ , co pozwala na zorientowanie się, jak zmienia się kształt przebiegu przy zmianie dobroci. Zgodnie z uwagą we wstępie nie badano wpływu kąta odcięcia  $\Theta$  przyjmując tę samą wartość  $\Theta=60^\circ$  dla wszystkich krzywych.

tłumiony w zakresie II oraz przebieg wymuszony w zakresie I), to jednak krzywe napięcia anodowego mogą się różnić między sobą w sposób istotny. Decydujący wpływ ma tutaj faza napięcia anodowego, przy której rozpo-



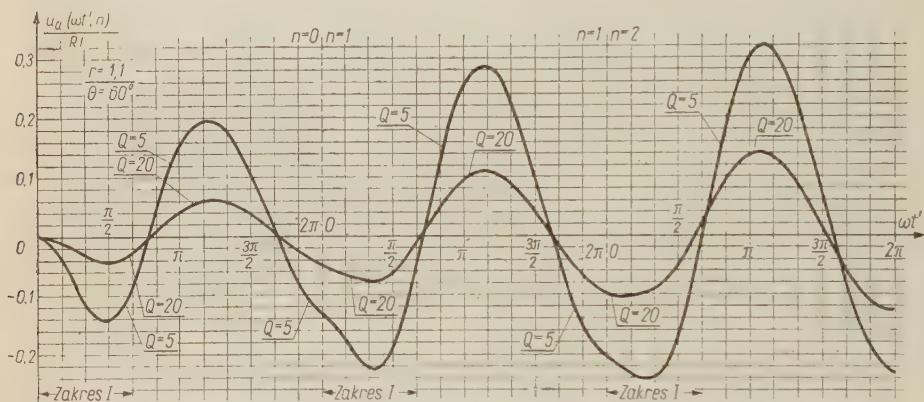
Rys. 17. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym przy  $r=0,8$ .



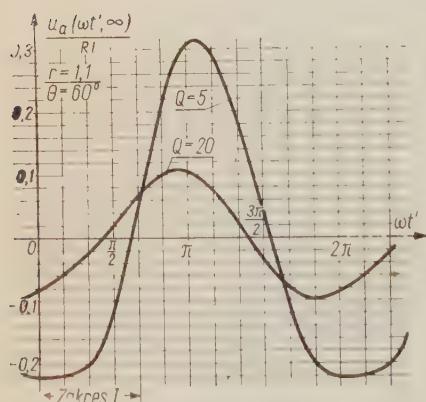
Rys. 18. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy  $r=0,8$ .

czyna się reakcja obwodu na kolejny impuls. Faza ta oczywiście do tego, jaka część przebiegu sinusoidalnego tłumionego mieści się w poszczególnych cyklach, a to zależy od  $r$  poprzez częstotliwość tego

przebiegu<sup>14</sup>. W zależności od tej fazy przebieg napięcia anodowego w czasie przepływu prądu (zakres I) może być w rozmaity sposób zniekształcony wykazując np. dodatkowe punkty przegięcia ( $r=1,1$ ) lub upodabniając się do przebiegu piłowego ( $r=0,5$ ). W każdym przypadku zniekształcenia przebiegu w zakresie I są dość istotne i znacznie większe niż w przypadku obwodu dostrojonego (por. [6]).



Rys. 19. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym przy  $r=1,1$ .



Rys. 20. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy  $r=1,1$ .

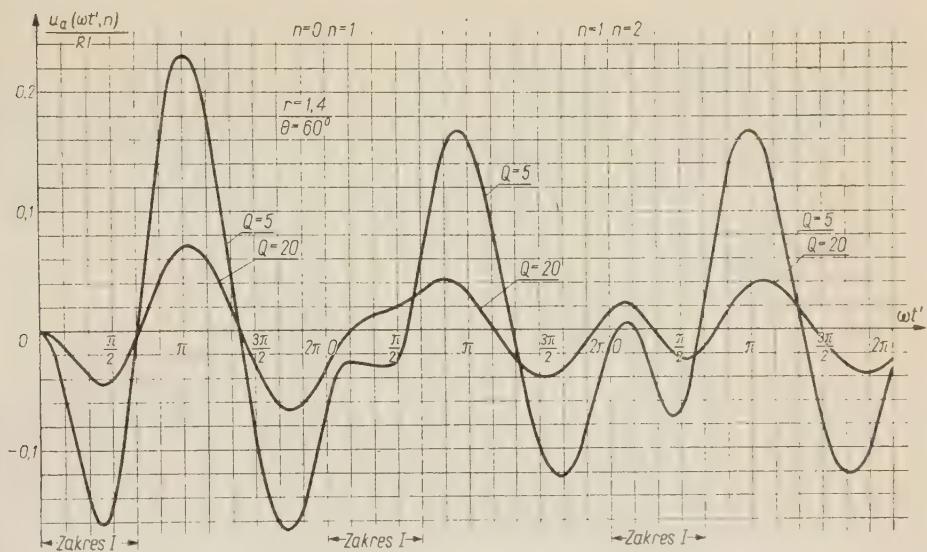
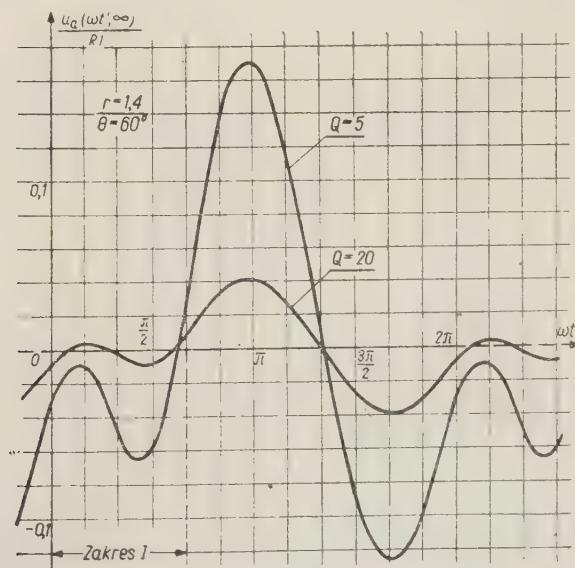
Wpływ omawianych zależności fazowych jest widoczny również w przebiegu ustalonym napięcia anodowego: w zależności od  $r$  krzywa napięcia anodowego może być w rozmaity sposób przesunięta względem impulsów prądu anodowego (rys. 16, 18, 20 i 22), podczas gdy przy dostrojeniu impulsy prądu anodowego występują zawsze synchronicznie z napięciem anodowym (maksima prądu  $i_a$  pokrywają się — w przybliżeniu — z minimami napięcia  $u_a$ ; por. [6]).

To przesunięcie krzywej napięcia anodowego względem impulsów prądu

jest, jak wiadomo, przyczyną występowania przy rozstrojeniu obwodu bardzo znacznych strat w anodzie lampy i niewielkiej mocy użytecznej.

Ponieważ, jak już wskazano na to w rozdz. 2.1, współczynnik  $P_n$

<sup>14</sup> Na przykład przy  $r < 1$  w cyklu napięcia anodowego „mieści się” niepełny cykl, a przy  $r > 1$  — więcej niż jeden cykl przebiegu sinusoidalnego tłumionego.

Rys. 21. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym przy  $r=1,4$ .Rys. 22. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy  $r=1,4$ .

w rozwiązaniach (2) i (3) zmienia się wraz z  $n$ , ogólnie biorąc, niemonotonicznie, amplitudy poszczególnych drgań w poszczególnych cyklach zmieniają się, ogólnie biorąc, również niemonotonicznie (por. np. rys. 15

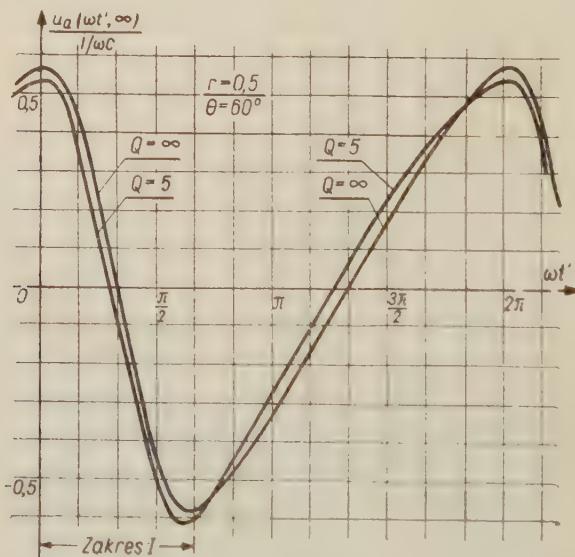
i 17). Powoduje to np. niemożność podania ogólnej definicji czasu ustalania się drgań dla dowolnej wartości  $r$ <sup>15</sup>.

Rozpatrywane krzywe nie dają możliwości porównania przebiegów napięcia anodowego przy skończonej dobroci i w przypadku granicznym  $Q=\infty$ , gdyż wobec zależności (37) przy  $Q \rightarrow \infty$  dostajemy przebiegi zerowe. Porównanie takie jest możliwe, jeśli zamiast wielkości  $\frac{u_a(\omega t', n)}{RI}$  rozpatrywać będziemy wielkość (por. (38)).

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} R\omega C = \frac{u_a(\omega t', n)}{I/\omega C},$$

gdyż, jak wykazano w rozdz. 3 istnieją niezerowe granice  $\frac{u_a(\omega t', n)}{I/\omega C}$  przy  $Q \rightarrow \infty$  w postaci zależności (40) i (41) dla stanu nieustalonego oraz zależności (43 i 44) dla stanu ustalonego.

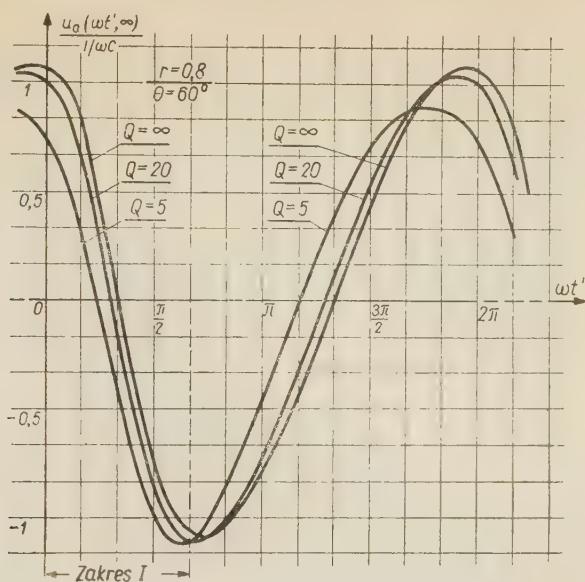
Na rys. 23, 24, 25 i 26 podano wykresy napięcia anodowego ustalonego



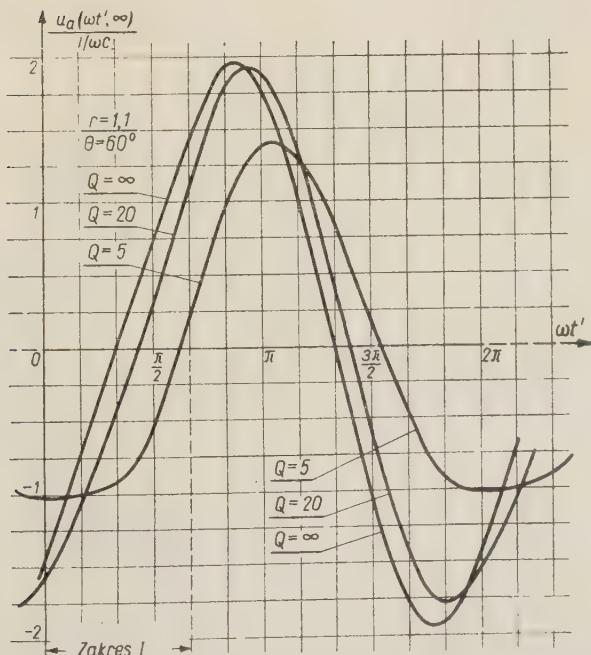
Rys. 23. Wykresy napięcia anodowego ustalonego przy dobroci skończonej i nieskończonej dla  $r=0,5$ .

odniesionego do wielkości  $I/\omega C$  oraz wartości granicznej tego napięcia przy  $Q=\infty$ .

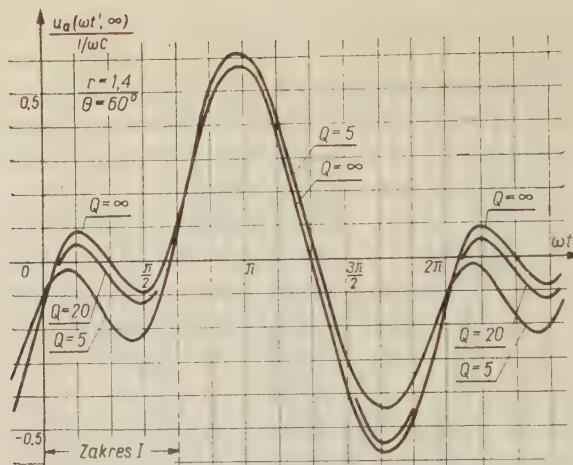
<sup>15</sup> Definicja taka dla przypadku  $r=k$  została podana w [6].



Rys. 24. Wykresy napięcia anodowego ustalonego przy dobroci skończonej i nieskończonej dla  $r=0,8$ .



Rys. 25. Wykresy napięcia anodowego ustalonego przy dobroci skończonej i nieskończonej dla  $r=1,1$ .



Rys. 26. Wykresy napięcia anodowego ustalonego przy dobroci skończonej i nieskończonej dla  $r=1,4$ .

Na zakończenie autor pragnie wyrazić serdeczne podziękowanie prof. drowi inż. Stanisławowi Ryżce za wiele cennych rad udzielonych przy opracowaniu tematu.

Instytut Matematyczny PAN

i

Katedra Urządzeń Radiotechnicznych  
Politechniki Warszawskiej

#### WYKAZ LITERATURY

1. Giacoleotto L. I. Parallel - tuned circuit periodically switched to a direct — current source. RCA Review, Sept. 1952.
2. Gonorowski I. Wozdziejstwie słożnych periodycznych elektrodwiszcznych sił na linijnyje sistemy. Radiotekhnika, nr 1, 1953.
3. Gonorowski I. Radiosignaly i pierechodnyje jawlenija w radiocepiach. Swiażizdat, Moskwa 1954.
4. Jewtianow S. I. Radiopieredajuszczije ustrojstwa. Swiażizdat, Moskwa 1950.
5. Osiowski J. Stany nieustalone w układach pobudzanych ciągiem impulsów. Arch. Elektrot., zesz. 1—2, tom II, 1953.
6. Osiowski J. Analiza przebiegów napięciowych w obwodzie anodowym wzmacniacza rezonansowego klasy C. Arch. Elektrot., zesz. 4, tom IV, 1955.
7. Ryżko S. Urządzenia radionadawcze cz. I. Wyd. MON, Warszawa 1954.
8. Zagajewski T. Radiotechniczne urządzenia nadawcze. PWT, Warszawa 1950.

#### РАБОТА РЕЗОНАНСНОГО УСИЛИТЕЛЯ КЛАССА С С РАССТРОЕННЫМ АНОДНЫМ КОНТУРОМ

#### Резюме

В работах (5) и (6) было дано общее решение анодного контура резонансного усилителя класса С и рассмотрен случай работы усилителя с подстроенным к резонансу контуром. Настоящая работа содержит окончание этой дискуссии в области работы усилителя с расстроенным анодным контуром.

Предположения условий работы усилителя приняты такие же, как и в работах (5) и (6). При этих предположениях может быть принята эквивалентная схема анодного контура согласно рис. 1, причем ход анодного тока  $i_a(\omega t)$  в пределах одного периода определяется зависимостью (1) и периодически повторяется. Согласно с (5) общее решение для переменной составляющей анодного напряжения получается в виде формул (2) и (3), причем коэффициенты в этих формулах определены зависимостями (5)–(13). Далее принято следующие обозначения:

$u_a$  — переменная составляющая анодного напряжения;

$Q = R\omega_0 C$  — добротность резонансного контура,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$  — собственная частота резонансного контура,

$\omega$  — частота повторения импульсов анодного тока,

$r = \frac{\omega_0}{\omega}$  — расстройка контура,

$I$  — максимальное значение импульсов анодного тока,

$\Theta$  — угол отсечки импульсов анодного тока

$$\left( 0 < \Theta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Переменные  $t'$  и  $n$  связаны с временем  $t$  зависимостью  $\omega t = \omega t' + n2\pi$  причем

$$0 \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n=0, 1, 2 \text{ itd.}$$

Зависимости (2) и (3) определяют решения в нестационарном режиме для очередных промежутков  $0 \leq \omega t' \leq 2\pi$  с конечными номерами  $n$ . Решение в установившемся режиме в пределах одного цикла (т. е. стационарного цикла) получается, согласно данному в (5) обоснованию, как предел этих зависимостей

$$u_a(\omega t', \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_a(\omega t', n).$$

Так как анодное напряжение  $u_a$  зависит от  $n$  только посредством функций  $\varphi_n$  и  $P_n$ , то стационарное решение  $u_a(\omega t', \infty)$  можно получить по формулам (2) и (3) замещая в них  $\varphi_n P_n$  пределами  $\varphi \infty$  и  $P \infty$ , определенными, по формулам (15) и (16). Это позволяет рассматривать зависимости (2) и (3) как решения так для нестационарного режима ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) как и для установившегося режима ( $n=\infty$ ), они правильны для любых значений параметров  $r$ ,  $Q$  и  $\Theta$ .

Целью настоящего труда является представить дискуссию вышеупомянутого решения в зависимости от трех основных параметров  $r = \frac{\omega_0}{\omega}$  и в области работы усилителя с расстроенным анодным контуром, т. е. для случая, когда  $r \neq k$ , где  $k$  — любое натуральное число. Случай подстроенного контура, т. е. при  $r=k$ , был рассмотрен в [6].

Расстройка анодного контура оказывает основное влияние на поведение анодного напряжения в нестационарном режиме, значительно осложняя — в сравнении с случаем подстройки — процесс установления колебаний. Так как поведение анодного напряжения в отдельных циклах нестационарного режима зависит от  $n$ , т. е. от очередного номера цикла только посредством  $P_n$  (или модуля  $P_n$  и фазы  $\varphi - \varphi_n$ ), то рассмотрение этого коэффициента имеет основное значение для характеристики процесса установления анодного напряжения.

На рис. 2 и 3 даны лиаграммы модуля  $P_n$  и  $P_\infty$  в функции расстройки  $r$ .

В начальном цикле ( $n=0$ ) мы имеем  $\hat{P}_0 = P_0 = 1$ .

Как это следует из рисунков 2 и 3, в некоторых промежутках переменности  $\tau$  мы имеем  $P_\infty > 1$ , в других  $P_\infty < 1$  и следовательно существуют соответственные промежутки, в которых анодное напряжение в стационарном цикле имеет большую амплитуду, в других меньшую, чем амплитуда колебания, вызванного первым импульсом тока. Значения  $\tau$ , отделяющие эти промежутки удовлетворяют уравнению  $P_\infty = 1$  или уравнению (18). Это уравнение имеет бесконечное число корней, причем каждому натуральному числу  $k$  соответствуют два корня —  $\tau_{kl} < k$  и  $\tau_{kp} > k$ , удовлетворяющие уравнению (20); знак плюс соответствует  $\tau_{kp}$ , знак минус — соответствует  $\tau_{kl}$ . Корни  $\tau_{kl}$  и  $\tau_{kp}$  имеют оценки (21) и предельные значения (22). Диаграмма зависимости  $\tau_{kp}$  и  $\tau_{kl}$  от добротности дана на рис. 5.

Фазовые зависимости и их изменения в отдельных циклах нестационарного режима характеризуются величиной

$$\varphi_n - \varphi = \operatorname{Arg} \hat{P}_n.$$

На рис. 6 и 7 даны диаграммы угла  $\varphi_n - \varphi$  в функции расстройки  $\tau$ . в установившемся режиме ( $n = \infty$ ) мы имеем  $\operatorname{Arg} \hat{P}_\infty = -\varphi$ ; диаграммы угла  $\varphi$  в функции  $\tau$  даны на рис. 8. На рис. 9 и 10 даны параметрические диаграммы коэффициента  $\hat{P}_\infty$ , позволяющие совместно рассмотреть амплитудные и фазовые зависимости при изменениях расстройки  $\tau$ .

Решение в установившемся режиме мы можем представить в виде зависимостей (32), из которой следует, что анодное напряжение обнаруживает фазовые запаздывания на угол  $\pi + \alpha + \varphi$  по отношению к функции  $\cos \tau(\omega t' - \Theta)$ .

Диаграммы дополнительного сдвига по фазе  $\alpha + \varphi$  в функции  $\tau$  даны на рис. 13. На рис. 12 даны диаграммы начальной амплитуды  $U_{ap}$  и конечной амплитуды  $U_{ak}$  в функции  $\tau$ , причем эти величины определены зависимостями (35) и (36) как значения мгновенной амплитуды (34) в точках  $\omega t' - 2\Theta$  и  $\omega t' = 2\pi$ .

Перемножая обе стороны зависимостей (2) и (3) множителем  $R\omega C = \frac{Q}{r}$  и переходя к пределу при  $Q \rightarrow \infty$  можно из формул (2) и (3) получить предельное решение для идеального контура с бесконечно большой добротностью ( $Q = \infty$ ) в виде зависимостей (40) и (41) нестационарный режим  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а также (43) и (44) — (установившийся режим  $n = \infty$ ).

Данные решения (2) и (3) очевидно позволяют не только исследовать влияние  $\tau$ ,  $Q$  и  $\Theta$  на другие параметры анодного напряжения, но и определить ход, поведение анодного напряжения во времени. На рис. 15, 17, 19 и 21 даны диаграммы анодного напряжения в функции угла  $\omega t$  в нестационарном режиме при различных значениях расстройки  $\tau$  и добротности  $Q$ . Аналогичные диаграммы для установившегося режима даны на рис. 16, 18, 20 и 22.

На рис. 23, 24, 25 и 26 даны диаграммы стационарного анодного напряжения при конечной добротности ( $Q < \infty$ ) и для бесконечно большой добротности ( $Q = \infty$ ), позволяющие характеризовать влияние добротности  $Q$  на форму анодного напряжения при расстроенном анодном контуре.

#### CLASS C RESONANCE AMPLIFIER WITH UNTUNED ANODE CIRCUIT

##### Summary

In previous publications [5] and [6] a general solution of the anode circuit of class C resonance amplifier was given and the case of the amplifier work with

tuned in resonance circuit was discussed. This paper embraces the final discussion stage in respect to the amplifier work with untuned anode circuit.

The same assumptions as in publications [5] and [6] with regard to the amplifier working conditions were accepted. Under these conditions the equivalent anode circuit as in Fig. 1 may be admitted. Within one period the anode current  $i_a(\omega t)$  is defined by dependence (1) and its changes recures periodically. The general solution for the variable component of anode voltage in accordance with the dependence (5) is expressed by formulae (2) and (3) and the coefficients used in these formulae are determined by the dependencies (5) to (13) where

$u_a$  — variable component of anode voltage,

$Q = R\omega_0 C = Q$  — factor of resonance circuit,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$  — self frequency of resonance circuit,

$\omega$  — frequency of impulse repetition of anode current,

$r = \frac{\omega_0}{\omega}$  — circuit untuning,

$I$  — maximum value of anode current impulse,

$\Theta$  — cut-off angle of anode current impulse  $\left(0 < \Theta < \frac{\pi}{2}\right)$ .

The variables  $t'$  and  $n$  are linked with time ( $t$ ) by a dependence and  $0 \leq \omega t' \leq 2\pi$ ,  $n=0, 1, 2$ .

The formulae (2) and (3) command the solutions in transient state for the successive intervals  $0 \leq \omega t \leq 2\pi$  with finite numbers  $n$ . The solution in steady state within intervals of a cycle (i. e. steady cycle) according to the prove given in publication (5) is obtained as the limit of the above formulae:

$$u_a(\omega t', \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_a(\omega t', n).$$

Since the anode voltage  $u_a$  depends on  $n$  through the functions  $\varphi_n$  and  $P_n$  only, the solution in steady state may be obtained from the formulae (2) and (3) by substituting  $\varphi_n$  and  $P_n$  with their limits  $\varphi_\infty$  and  $P_\infty$  defined by the formulae (15) and (16). The formulae (2) and (3), therefore, may be considered as the solutions in transient state,  $n=0, 1, 2, \dots$  as well as in steady state ( $n=\infty$ ) and they are correct for any of  $r$ ,  $Q$  and  $\Theta$  parameter values.

The object of the work to present the discussion of mentioned solutions in respect of the basic parameters  $r = \frac{\omega_0}{\omega}$ ,  $Q$ ,  $\Theta$ , for the amplifier with untuned anode circuit i. e.  $r \neq k$ , where  $k$  corresponds to any natural number. The case of the tuned circuit i. e.  $r=k$  was already discussed in publication [6].

The untuned anode circuit exercises a foundamental influence in transient state on the anode voltage changes and in comparison to tuned in resonance circuit complicates considerably the oscillation stabilizing process. Since the anode voltage changes in the particular cycles of the transient state depend on  $n$  i. e. the successive cycle number through  $\hat{P}_n$  (or the modulus  $P_n$  and phase  $\varphi - \varphi_n$  only, examining of this coefficient is of a foundamental importance for the description of the stabilizing process of the anode voltage.

The Figs. 2 and 3 show the graphs of the modulus  $P_n$  and  $P_\infty$  in function of  $r$ . In initial cycle ( $n=0$ )  $\hat{P}_0$  is equal to

$$\hat{P}_0 = P_1 = 1.$$

It follows from Figs. 2 and 3 that within certain intervals of  $r$  changeability the  $P_\infty > 1$  and in others  $P_\infty < 1$ . Hence there must exist similarly the intervals in which the anode voltage in steady cycle has the amplitude either greater or smaller of that evoked by the first current impulse. The values of  $r$  parting these intervals satisfy the equation  $P_\infty = 1$  or the equation (18). This equation has an infinite number of roots and in response to each natural number  $k$  there are two roots  $r_{kl} < k$  and  $r_{kp} > k$  satisfying equation (20). The symbols + (plus) and (minus) correspond to  $r_{kp}$  and  $r_{kl}$  respectively. The  $r_{kl}$  and  $r_{kp}$  roots have the estimated values (21) and the limit values (22). The graph of  $r_{kp}$  and  $r_{kl}$  in respect of the  $Q$  — factor is given in Fig. 5.

The magnitude  $\varphi_n - \varphi = \text{Arg } \hat{P}_n$  describes the phase dependencies and their changes in particular cycles of transient state. The graphs of  $\varphi_n - \varphi$  angle in function of  $r$  are given in Figs. 6 and 7. The graphs of  $\varphi$  angle in function  $r$  in steady state when  $\text{Arg } \hat{P} - \varphi$  are shown in Fig. 8. The parametric graphs of  $\hat{P}_\infty$  coefficient permitting the conjoint analysis of the amplitude and phase dependencies by  $r$  changes are given in Figs 9 and 10.

In steady state the saluton may be expressed by the formulae (32), from which it derives that the steady anode voltage in respect of  $\cos r(\omega t' - \Theta)$  changes is lagging by  $\pi + \alpha + \varphi$  phase angle. The graphs of additional phase shift  $\alpha + \varphi$  in function of  $r$  is given in Fig. 13. The graphs of the initial amplitude  $U_{ap}$  and terminal amplitude one  $U_{ak}$  in function of  $r$  gives Fig. 12. These magnitudes are determined by the formulae (35) and (36) as the instantaneous amplitude values (34) in the points  $\omega t' = 2\Theta$  and  $\omega t' = 2\pi$ .

Multiplying both sides of the expressions (2) and (3) by  $R\omega C = \frac{Q}{r}$  and approaching to limit by  $Q \rightarrow \infty$ , it is possible to get from these expressions the boundary solution, for the ideal circuit with infinitely great  $Q$  — factor ( $Q = \infty$ ), in the form of dependencies (40), (41) in transient state ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) and (43), (44) in steady state ( $n = \infty$ ).

The given solutions of the expressions (2) and (3) permit not only to explore the influence the parameters  $r$ ,  $Q$  and  $\Theta$  exercise on the other parameters of anode voltage, but they enable equally the determination of the anode voltage changes in fuction of time. The graphs of the anode voltage in function of  $\omega t'$  angle in transient state at the various  $r$  and  $Q$  values are given in Figs. 15, 17, 19 and 21.

The analogous graphs in steady state show Figs 16, 18, 20 and 22. The graphs of the steady anode voltage at the finite  $Q$  — factor ( $Q = \infty$ ) and finite — ( $Q = \infty$ ) enabling to describe the influence which the  $Q$  — factor ( $Q$ ) exercises on the shape of anode voltage curve when anode circuit is untuned are given in Figs 23, 24, 25 and 26.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Komunikaty z prac

Zakładu Elektroniki przy współpracy z Katedrą Podstaw Telekomunikacji  
Politechniki Warszawskiej

669.15.198.001.2

R. WADAS

WPŁYW JONÓW CYNKU NA WŁASNOŚCI FERRYTÓW MANGANOWO-MAGNEZOWYCH O PROSTOKĄTNEJ PĘTLI HISTEREZY

Rękopis dostarczono 16. 6. 58

Przedstawiono wyniki otrzymane przy opracowywaniu ferrytów z prostokątną pętlą histerezy. Wyniki dotyczą ferrytów wytworzonych 1) z trójtlenku żelaza ( $Fe_2O_3$ ), węglanu manganu ( $MnCO_3$ ), tlenku magnezu ( $MgO$ ), 2) z surowców wymienionych w p. 1 z dodatkiem tlenku cynku ( $ZnO$ ). Pomiarы wykonano metodą impulsową dla rdzeni wytworzonych z mieszanek o optymalnych właściwościach.

ВЛИЯНИЕ ЦИНКОВЫХ ИОНОВ НА СВОЙСТВА МАРГАНЦЕВО-МАГНИЕВЫХ ФЕРРИТОВ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ГИСТЕРЕЗИСА ПЕТЛЕЙ

РЕЗЮМЕ

Представлены результаты, полученные при изготовлении Ферритов с прямоугольной петлей гистерезиса. Результаты касаются ферритов изготовленных: 1) из окиси железа ( $Fe_2O_3$ ) из карбоната марганца ( $MnCO_3$ ), окиси магния ( $MgO$ ), 2) из сырья приведенного в пункте 1 с примесью окиси цинка ( $ZnO$ ). Измерения производились баллистическим методом, а для сердечников с оптимальными свойствами и импульсным методом.

INFLUENCE OF ZINC IONS UPON MANGANESE-MAGNESIUM FERRITES WITH RECTANGULAR HYSTERESIS LOOP

SUMMARE

The paper presents the results obtained during the laboratory work of ferrites with rectangular hysteresis loop.

The results refer to ferrites produced from:

- 1) iron trioxide ( $Fe_2O_3$ ), manganese carbonate ( $MnCO_3$ ), magnesium oxide ( $MgO$ ),
- 2) raw materials as above with addition of zinc oxide ( $ZnO$ ).

The measurement have been carried out with the aid of ballistic — and impuls methods on the cores produced from mixtures with optimum properties.

1. UWAGI TECHNOLOGICZNE

Przeprowadzono próby mające na celu otrzymanie ferrytów o prostokątnej pętli histerezy. Jako produkty wyjściowe zastosowano techniczny tlenek magnezu i trójtlenek żelaza oraz chemicznie czysty węglan manganu i tlenek cynku; mieszania i mielenia surowców dokony-

wano w młynach kulowych. Wyżarzanie wstępne odbywało się w temperaturze  $1150 \pm 20^\circ C$  w czasie czterech i pół godz. Temperatura ta została wybrana z ceramicznego punktu widzenia wytwarzanych kształtek: jest to najniższa temperatura, przy której różnica w

skurczu próbki wzdłuż jej wysokości jest mniejsza od 5%.

Po wyżarzeniu wstępny masę mieli ono przez 48 godz. Próbki prasowano stosując ciśnienie 1 t/cm<sup>2</sup>. Końcową reakcję syntezy przeprowadzano w temperaturze zależnej od składów chemicznych mieszanki. Dla poszczególnych ferrytów podano je w dalszej części tej pracy. Stwierdzono, że zmiana surowców powoduje, między innymi, konieczność zmiany końcowej temperatury wypalania. Temperatura powyższa i czas wypalania są dosyć krytyczne.

## 2. WYNIKI POMIARÓW

Pomiary statyczne przeprowadzono na rdzeniach o średnicy zewnętrznej  $d_z = 20,5$  mm, wewnętrznej  $d_w = 13,8$  mm i wysokości  $h = 5$  mm. Pomiary wykonano metodą balistyczną. Dotyczą one:

1. współczynników prostokątności określonych zależnościami

$$R_s = \frac{B_{Hm/2}}{B_m} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{B_{Hm/2}}{B_m}$$

( $B_m$  — wielkość indukcji odpowiadającej natężeniu pola magnesującego  $H_m$ ),

$B_{Hm/2}$  — wartość indukcji przy natężeniu pola magnetycznego

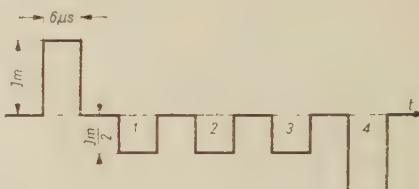
$$-\frac{H_{m/2}}{H_m}$$

$B_r$  — pozostałość indukcji;

2. indukcji  $B_m$  odpowiadającej optimum współczynnika prostokątności  $R_s$ ;
3. natężenia pola magnetycznego  $H_m$  odpowiadającego optimum współczynnika prostokątności  $R_s$ .

Pomiary impulsowe wykonano w Zakł. Apar. Mat. PAN. Dotyczą one rdzeni o średnicy zewnętrznej  $D_z = 2,1$  mm, średnicy wewnętrznej  $d_w = 1,4$  mm i wysokości  $h = 1$  mm. Tego typu rdzenie wykonywano tylko z mieszanki ferrytowej o optymalnych właściwościach. Przebieg prądu pobudzającego rdzeń przedstawiono na rys. 1.

Impulsowi prądu oznaczonemu na rys. 1 cyfrą 4 odpowiada napięcie oznaczone przez  $U_s$ , i nazywane napięciem sygnału, natomiast impulsom oznaczonym cyfra-



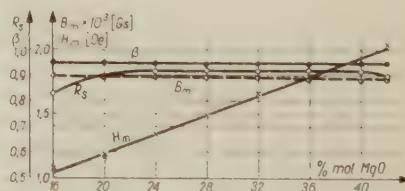
Rys. 1

mi 1, 2, 3 odpowiadają napięcia określone przez  $U_{s1}$ ,  $U_{s2}$ ,  $U_{s3}$  i nazywane napięciami zakłóceń. Wyniki pomiarowe przedstawiają:

- a) napięcie sygnału,
- b) największe z napięć zakłócających,
- c) optymalny stosunek napięcia sygnału do największego z napięć zakłócających,
- d) czas przełączania,
- e) natężenie pola magnetycznego  $H_m$ , przy którym występuje optimum  $U_s$ .

Badania, których wyniki przedstawiono niżej, są kontynuacją pracy [16].

Na rys. 2 przedstawiono wyniki prac przeprowadzonych nad ferrytami o układzie  $\text{MgO}-\text{MnO}-\text{Fe}_2\text{O}_3$  przy stałej zawartości 41% mol.  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ .



Rys. 2

Pomiary dynamiczne przedstawione w tablicy 1 wykonano dla ferrytu o optymalnym współczynniku napięcia sygnału do napięcia zakłócającego. Odpowiadają one ferrytowi o składzie chemicznym 41%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , 27%  $\text{MnO}$ , 32%  $\text{MgO}$ .

Tablica 1

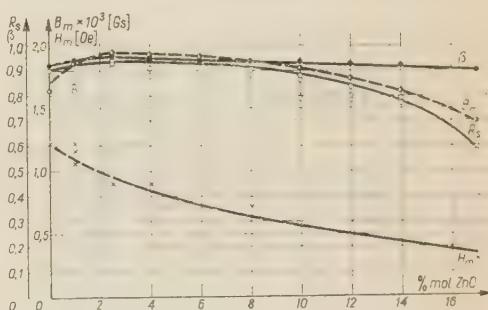
| Typ ferrytu | $H_m$<br>Oe | $U_s$<br>mV | $U_{z1}$<br>mV | $U_{z2}$<br>mV | $\frac{U_s}{U_{z1}}$ | $\frac{U_s}{U_{z2}}$ | $\tau_{opt}$<br>μsek | $R_s$                      |
|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------|
| Mg12        | 2,3         | 140         | 6              | 6              | 23,3                 | 23,3                 | 2,4                  | 0,92<br>przy<br>$H=1,4$ Oe |

Ze względu na dość znaczną wartość natężenia pola magnetycznego, przy którym występuje optimum współczynnika prostokątności  $R_s$ , przeprowadzono badania zmierzające do zmniejszenia pola przez zastępowanie w siatce kryształicznej ferrytu, jonów magnezu, jonami cynku, analogicznie jak to robili G. G. Palmer, R. W. Johnston i R. E. Schultz [13]. Wybrano za punkt wyjścia ferryt o składzie chemicznym 41%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , 22%  $\text{MgO}$ , 37%  $\text{MnO}$ . Jako kryterium wyboru przyjęto warunek  $R_s \geq 0,9$  (rys. 1) przy jednoczesnej jak najmniejszej wartości natężenia pola magnetycznego  $H_m$ .

Wyniki badań przedstawiono na rys. 3.

Wyniki pomiarów dynamicznych dotyczą ferrytu o optymalnym współczyn-

niku prostokątności  $R_s$ . Odpowiadają one ferrytowi o składzie chemicznym 41%



Rys. 3

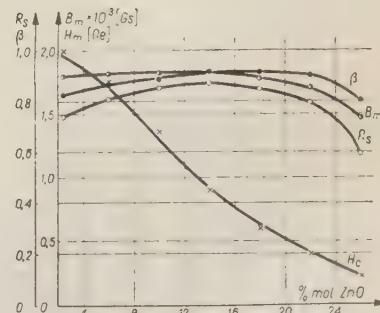
$\text{Fe}_2\text{O}_3$ , 37%  $\text{MnO}$ , 19,5%  $\text{MgO}$ , 2,5%  $\text{ZnO}$  i przedstawione są w tablicy 2.

Tablica 2

| Typ ferrytu | $H_m$<br>Oe | $U_s$<br>mV | $U_{z1}$<br>mV | $U_{z2}$<br>mV | $\frac{U_s}{U_{z1}}$ | $\frac{U_s}{U_{z2}}$ | $\tau_{opt}$<br>μsek | $R_s$                      |
|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------|
| Mg27        | 1,3         | 70          | 6              | 6              | 12                   | 12                   | 3,1                  | 0,94<br>przy<br>$H=0,9$ Oe |

Niezależnie od wyżej podanych wyników starano się powtórzyć pracę Goodenougha [8] interesującą z punktu widzenia opracowywanych materiałów. W związku z tym za punkt wyjścia przyjęto ferryt o następującym stosunku wyjściowym tlenków: 39,5%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , 21%  $\text{MnO}$ , 39,5% (MgO—ZnO). Wyniki prób zilustrowano na rys. 4.

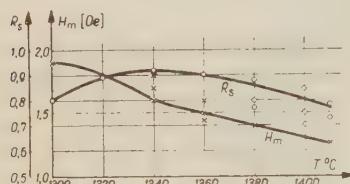
Pomiary impulsowe tego typu ferrytów nie wprowadzają nic interesującego w porównaniu do poprzednio omawia-



Rys. 4

nich i dlatego nie podano ich wyników. Otrzymane dane potwierdzają w zasadzie pracę [8].

Podeczas prób stwierdzono, że ferryty o różnych składach chemicznych wymagają różnej temperatury i czasu wypalania. Dla ferrytów, których własności przedstawione są na rys. 2, temperatura ta zawiera się w niewielkich granicach  $1330 \pm 20^\circ\text{C}$ , a czas wypalania od trzech do sześciu godzin. Przykładowo na rys. 5

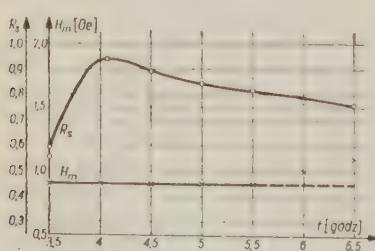


Rys. 5

podano wartość współczynnika prostokątności  $R_s$  i natężenia pola magnetycznego  $H_m$  w funkcji temperatury dla ferrytu o składzie chemicznym 41%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , 27%  $\text{MnO}$ , 32%  $\text{MgO}$ . Czas spiekania próbek wynosił 4 godz. Należy zauważać, że w przeprowadzonych próbach szukano najniższej temperatury wypalania, przy której współczynnik prostokątności  $R_s$  jest nie mniejszy od optymalnych współczynników  $R_s$ , otrzymanych w innych warunkach.

W analogiczny sposób określono temperatury wypalania ferrytów, których własności przedstawione są na rys. 3 i 4.

Na rys. 6 podano przykładowo wpływ czasu spiekania na parametry  $R_s$  i  $H_m$ .



Rys. 6

ferrytu o składzie chemicznym 41%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , 37%  $\text{MnO}$ , 19,5%  $\text{MgO}$ , 2,5%  $\text{ZnO}$ . Temperatura wypiekania wynosiła  $1340^\circ\text{C}$ .

Ze względu na utlenianie się ferrytu podeczas studzenia, rdzenie hartowano w powietrzu z szybkością  $1300^\circ\text{C}$  na minutę. Przy studzeniu rdzeni w argonie ze ślädami  $\text{O}_2$  nie spostrzeżono wzrostu współczynnika prostokątności.

Z tablic 1 i 2 wynika, że dla dwóch różnych materiałów o tego samego rzędu wartościach współczynnika prostokątności  $R_s$  stosunek napięć sygnałów do napięć zakłócających  $U_s/U_s$  może się znacznie różnić. Jest to wynikiem różnych czasów przełączania. Zjawisko to jest powtarzalne. Spostrzeżono, że w miarę zmniejszania się natężenia pola  $H_m$  wzrasta czas przełączania przy niezmiennej wartości współczynnika prostokątności  $R_s$ . Analogiczne własności wykazują ferryty typu  $S_1$  i  $S_3$  wytwarzane przez amerykańską firmę Ferramic.

### 3. WNIOSKI TECHNOLOGICZNE

Ferryty wytworzone z tlenków magnazu i manganu oraz trójtlenku żelaza przy stosunkowo dużym współczynnikiem  $R_s \sim 0,9$  i względnie małym czasie przełączania  $\tau = 1$  sek posiadają znaczne natężenie pola magnetycznego  $H_m \sim 1,5$  Oe. Otrzymanie dużych natężeń pól wymaga rozbudowanych układów zasilających co jest technicznie nieekonomiczne. Aby zmniejszyć wielkość natężenia pola magnetycznego  $H_m$  należy zmniejszyć energię ferrytu. Można to uczynić następującymi sposobami:

1. zmianą stosunku tlenków  $\text{MgO} - \text{MnO} - \text{Fe}_2\text{O}_3$ ,
2. zamianą całkowitą lub częściową jonów  $\text{MgO}^{\text{II}} - \text{MnO}^{\text{II}}$  jonami, innych pierwiastków,
3. odpowiednim przeprowadzeniem procesów technologicznych.

Omówmy powyższe metody.

- a) Metoda pierwsza opracowana przez szereg autorów [1], [2], [8], [9], [10]

wydaje się być wyczerpana. Natomiast pozostałe dwie stanowią problem otwarty.

b) Wyniki zamiany jonów  $Mn^{+}$  lub  $Mg^{++}$  przez jony  $Ni^{++}$ ,  $Fe^{+++}$ ,  $Li^{+}$ ,  $Cu^{++}$ ,  $Co^{++}$  podane przez E. W. Gortera [9], H. von der Heide'a i współpracowników [11] (tablica 3) nie są zadowalające.

Tablica 3

| Rodzaj ferrytu                          | $\tau_{\max}$<br>μsek | $H_m$<br>Oe | $R_s$ |
|---|-----------------------|-------------|-------|
| $(CuO)_{0,1}(MnO_{1+8})_{0,1}Fe_2O_3$   |                       | 0,8         | 0,75  |
| $Mg_{0,6}Ni_{0,4}Fe_2O_4$               | 2,5                   | 2,2         | 0,8   |
| $(MgO)_{0,5}(MnO_{1+8})_{0,875}Fe_2O_3$ | 2,2                   | 1,5         | 0,75  |
| $MnFe_2O_4$                             | 11                    | 0,5         | 0,8   |
| $Li_{0,47}Ni_{0,06}Fe_{2,47}O$          | 0,6                   | 4,5         | 0,85  |
| $Co_{0,1}Fe_{0,9}^{++}Fe_2^{+++}O_4$    | 10                    | 10          | 0,95  |

Porównanie wyników przedstawionych na rys. 2 z wynikami z tablicy 3 pozwala stwierdzić, że metoda zastępowania jonów  $Mg^{++}$  —  $Mn^{++}$ , jak dotąd, nie dała rozwiązań. Otrzymano albo zbyt duże natężenie pola magnetycznego  $H_m$ , albo zbyt mały współczynnik prostokątności  $R_s$ .

Wprowadzenie do ferrytu czwartego pierwiastka cynku jest pewnym krokiem naprzód.

W istocie, wyniki doświadczeń przedstawionych na rys. 3 i 4 wskazują wyraźne zmniejszenie natężenia pola magnetycznego  $H_m$  w miarę wzrostu zawartości jonów cynku. Niekorzystny jednakże technologicznie jest fakt, że w miarę zmniejszania się natężenia pola wzrasta czas przełączania  $\tau$ , a co za tym idzie, maleje stosunek napięcia sygnału do napięcia zakłócającego (tablica 1 i 2). Zjawisko to nastręcza poważne trudności

interpretacyjne, spowodowane brakiem wystarczających danych doświadczalnych dotyczących energii wewnętrznej ferrytu szczególnie energii anizotropii i magnetostrykcji. Nathans R. i współpracownicy [12] stwierdzili za pomocą dyfrakcji neutronów, że w ferrytach  $Mn$ — $Mg$  poza jonami magnezu i jony manganu mogą zajmować położenia tetraedryczne. Należy więc przypuszczać, że dodatek jonów cynku wypiera z położen tetrade-rycznych jony magnetyczne ( $Fe^{++}$ ,  $Mn^{++}$ ), analogicznie jak to się dzieje w ferrytach  $Me$ — $Zn$ . Świadczyć o tym może wzrost indukcji nasycenia (w pewnym zakresie) w miarę wzrostu zawartości jonów cynku. Pomiary temperatury Curie [8] i [13] wskazują na jej wyraźne zmniejszenie się w funkcji zwiększenia się ilości  $Zn^{++}$ . Analogicznie jak w innych ferrytach zawierających  $Zn^{++}$  jest to wynikiem zmniejszania się wymienionej energii wiązań.

Przyjmując hipotezę E. W. Gortera [9] o zmniejszaniu się anizotropii  $K$  w miarę wzrostu temperatury za słuszną, należy się spodziewać zmniejszenia energii anizotropii w miarę wzrostu zawartości w ferrycie jonów cynku. Analogicznie jak w innych ferrytach  $Me$ — $Zn$  uzasadnić to można wzrostem temperatury zredukowanej  $T_0 = T/T_c$  ( $T_c$  — temperatura Curie,  $T$  — temperatura, w której wykonuje się pomiar). H. van der Heide i współpracownicy [11] przyjmując, że proces magnesowania odbywa się przez obroty wektorów namagnesowania, określili szybkość tych obrotów zależnością

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{H}{c} \sin a,$$

gdzie  $a$  — kąt między kierunkiem natężenia pola  $H$  i momentem magnetycznym  $M$ ,  
 $c$  — stała tłumienia.

Z powyższej aproksymacyjnej zależności wynika, że bez względu na wartość stałej tłumienia  $c$  szybkość magnesowania ferrytu nie ulegnie zmianie jeśli w takim samym stopniu będziemy zmieniały natężenie pola.

<sup>1</sup>  $\tau_{\max}$  — największy z możliwych dla naszej próbki czas przełączania.

Jeśli przyjąć również obecność procesu magnesowania przez ruch ścian Blocha, jak to zrobił J. K. Galt [6], [7], to szybkość przesuwania się ścian można wyrazić zależnością

$$V = \frac{H - H_0}{\beta}.$$

gdzie  $H_0$  — natężenie pola magnetycznego bliskie  $H_c$

$\beta$  — stała tłumienia ściany Blocha proporcjonalna w przybliżeniu do pierwiastka kwadratowego ze stałej anizotropii  $K$  i odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego ze stałej energii wymiennej  $A$ .

Przy zachowaniu stałej różnicy ( $H - H_0$ ), co praktycznie jest spełnione, zmniejszenie prędkości może nastąpić tylko wówczas, gdy stosunek  $A/K$  będzie mały. Jest to mało prawdopodobne ze względu na większą wartość energii wymiennej wiązania od energii anizotropii. Jeśli wyjaśnić to za pomocą temperatury zredukowanej  $T_0 = T/T_c$ , to jej wzrost powinien spowodować zmniejszenie się energii anizotropii w stopniu o wiele większym od stopnia zmniejszenia się energii wymiennej.

Zarówno więc z mechanizmu obrotów wektorów namagnesowania, jak ruchu ścian Blocha wynika, że szybkość magnesowania ferrytu nie powinna zmaleć przy dodawaniu jonów cynku, a wręcz przeciwnie, należałoby się spodziewać jej wzrostu.

Przyczyn powiększenia się czasu przełączania należy szukać w zwiększeniu rozpiętości możliwych wartości energii poszczególnych wektorów namagnesowania i ścian Blocha. Skąpa ilość z tej dziedziny publikowanych prac doświadczalnych uniemożliwia wyjaśnienie tego zjawiska. Wydaje się, że decydującym krokiem naprzód byłoby dokładne określenie sposobu wiązania poszczególnych pierwiastków użytych do wytwarzania ferrytu oraz określenia ich położenia w siatce krystalicznej jaką tworzą.

c) Procesom technologicznym i powiązaniom ich z właściwościami magnetycznymi materiału poświęca się bardzo mało miejsca w literaturze fachowej z tej dziedziny. Istnieje jedynie szereg prac [3], [4], [5], [8], [15], [17] rozpatrujących wpływ zawartości tlenu na właściwości magnetyczne ferrytów zawierających mangan. Zastosowanie wniosków wyżej cytowanych prac do rozpatrywanych przez nas typów materiałów sprowadza się do powstrzymania procesu utleniania ferrytu podczas studzenia spieczonych próbek. Dokonuje się tego następującymi metodami: a) hartowaniem, b) studzeniem w atmosferze obojętnej, c) studzeniem w próżni, d) spryskiwaniem powierzchni materiału odpowiednią „glazurą” nie dopuszczającą tlenu do wnętrza rdzenia [17], e) domieszkami niewielkich ilości tlenków metali ( $Cu_2O$ ) [14].

Ze względu na bardzo dużą ilość kombinacji, jaką można zastosować w procesie technologicznym, jak i na pojawiające się co pewien okres nowe pomysły, wydaje się, że prace w tym kierunku nie są zakończone.

Reasumując wyżej omawiane zagadnienia nasuwają się następujące uwagi:

- 1) prace nad zmianą stosunku tlenków w układzie  $MgO - MnO - Fe_2O_3$  należy uważać za wyczerpane;
- 2) zmniejszenie energii wewnętrznej ferrytu w miarę wzrostu zawartości cynku wydaje się być wynikiem co najmniej zmniejszenia energii anizotropii  $K$ ;
- 3) na podstawie teorii krzywej magnesowania i fenomenologicznych wyoobrażeń o procesach magnesowania wydaje się być słusze stwierdzenie, że w ferrytach  $Mn - Mg$  z dodatkiem jonów cynku istnieje potencjalna możliwość zmniejszenia natężenia pola magnetycznego  $H_m$  bez zmiany czasu przełączania; trudno jest również wykluczyć możliwość zastosowania innego pierwiastka w miejsce cynku.

## WYKAZ LITERATURY

1. Bragiński A. — Arch. Elektrot. T. IV, z. 3, 1955.
2. Bragiński A. — Arch. Elektrot. T. VI, z. 2, 1957.
3. Bragiński A., Frączek K., Frączek T. — Arch. Elektrot. T. VI, z. 4, 1957.
4. Broz J., Bergstein A., Krupicka S., Vintera J., Zaweta K. — Cesk. Cas. Fys. 7, 1957.
5. Economos G. — J. of Am. Cer. Soc. v. 38, nr 10, 1955, v. 38, nr 11, 1955.
6. Galt J. K., Andrus J., Hoppen H. G. — Rev. Modern Phys. v. 25, nr 1, 1953.
7. Galt J. K. — PIEEE v. 104, part B, nr 5, 1957.
8. Goodenough J. — I. E. E. Convention on ferrites, oct. 1956.
9. Gorter E. W. — PIRE v. 43, nr 12, 1955.
10. Hegyi I. J. — Journ. of App. Phys. v. 25, nr 2, 1954.
11. von der Heide H., Bruijning H. G., Wijn Phil H. P. — Tech. Rev. v. 18, nr 11, 1956/57.
12. Nathans R., Pickhart S. J., Harrisson S. E., Kriesman C. J. — PIEEE v. 104, part B, 1957.
13. Palmer G. G., Jahnston R. W., Schultz R. E. — Journ. Am. Cer. Soc. v. 40, nr 8, 1957.
14. Suchet J. — Journ. de Phys. et le Radium v. 18, 1957.
15. Toropow N. A., Rabkin Z. J., Freidenfeld E. Z., Epstein B. S. — Zurnal Prikl. Chimii 26, nr 9, 1953.
16. Wadas R. — Arch. Elektrot. T. VI, z. 4, 1957.
17. Weisz R. S. — Journ. of Am. Cer. Soc. 40, nr 4, 1957.

621.3.42.12.001.2

A. BRAGIŃSKI

WPŁYW STOSUNKU PROMIENI RDZENIA PIERŚCIENIOWEGO NA POSTAĆ JEGO PĘTLI HISTEREZY I NA AMPLITUDOWE CHARAKTERYSTYKI PROSTOKĄTNOŚCI

Rękopis dostarczono 2. 5. 1958

Na podstawie elementarnych obliczeń wykazano, że dla rdzeni pierścieniowych, o stosunku promieni większym od jedności, idealnie prostokątna pętla histerezy materiału magnetycznego przekształca się w rodzinę pętli o odmiennym kształcie. Wartość maksymalna stosunku  $B_{rem}/B_m$  nie zależy od stosunku promieni, natomiast wartość maksymalna  $B \left( \frac{-H_m}{2} \right)$ :  $B_m$  maleje ze wzrostem tego stosunku. Graniczny stosunek promieni, nie powodujący zmniejszenia tej ostatniej wartości, jest równy 2. Dla płytki matrycowej Rajchmana dopuszczalny stosunek średnicy otworu od odległości otworów sąsiednich jest równy 0,5.

ВЛИЯНИЕ СООТНОШЕНИЯ РАДИУСОВ КОЛЬЦЕВОГО СЕРДЕЧНИКА НА ВИД ЕГО ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ПЕТЛИ И НА АМПЛИТУДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

## РЕЗЮМЕ

На основании элементарных вычислений доказано, что для кольцевых сердечников с соотношением радиусов больших чем единица, идеально прямоугольная петля гистерезиса магнитного материала превращается в семейство петель. Максимальное значение соотношения  $B_{rem}/B_m$  не зависит от соотношения радиусов, что же касается максимального значения  $B \left( \frac{-H_m}{2} \right)$ :  $B_m$ , то оно уменьшается с увеличением этого соотношения. Предельное соотношение радиусов, не вызывающее уменьшения этого последнего значения, равняется 2.

Для матричной пластиинки Райхмана допустимое соотношение диаметра отверстия к расстоянию между соседними отверстиями равняется 0,5.

# INFLUENCE OF OD/ID RATIO ON THE SHAPE OF HYSTERESIS LOOP AND RECTANGULARITY CHARACTERISTICS OF A RING CORE

## S U M M A R Y

The hysteresis loop of a ring core with  $OD/ID > 1$  transforms into a family of differently shaped loops. This result follows from elementary considerations. The maximum value of  $B_{rem} : B_m$  ratio is independent from OD/ID ratio, but the rectangularity  $B \left( -\frac{H_m}{2} \right) : B_m$  diminishes when OD/ID ratio is raised to a value greater than two. The ratio of aperture diameter of the distance between neighbouring apertures of Rajchman apertured plate should not be greater than 0,5.

## 1. WSTĘP

Jednym z ważniejszych zastosowań materiałów magnetycznych o prostokątnej pętli histerezy są elementy pamięciowe i przełącznikowe cyfrowych maszyn matematycznych. Stopień prostokątności pętli histerezy określa się w tych zastosowaniach za pomocą współczynników  $S$ ,  $R$ ,  $P$  [1]<sup>1</sup>. Przy projektowaniu systemu pamięciowego pożądana jest znajomość przebiegów wielkości  $S$ ,  $R$ ,  $P$  w funkcji wartości maksymalnej pola magnesującego  $H_m$ , czyli tzw. amplitudowych charakterystyk prostokątności. W pracy [1] porównano teoretyczne przebiegi  $S$ ,  $R$ , otrzymane przy założeniu idealnie prostokątnej pętli histerezy, z przebiegami otrzymanymi w wyniku pomiaru próbek ferrytowych o niezbyt prostokątnej pętli. Przebiegi charakterystyk amplitudowych zależą jednak nie tylko od jakości materiału magnetycznego, lecz także od stosunku promieni rdzenia pierścieniowego poddanego pomiarom.

Ta ostatnia zależność została pomiarowo stwierdzona przez Kornetzkiego [3]. Wpływ kształtu rdzenia na prostokątność pętli histerezy rozważał także Hermann [2], brak jednak w dostępnej literaturze usystematyzowanych danych z tej dziedziny.

Celem niniejszego komunikatu jest obliczenie wpływu stosunku promieni rdzenia pierścieniowego na postać wybranej pętli histerezy i na przebiegi charakterystyk amplitudowych  $S$ ,  $R$ . Charakterystyka  $P$  nie będzie rozważana, ponieważ przebieg jej jest analogiczny do przebiegu  $R$ . Obliczenie przeprowadzono, zakładając idealnie prostokątną postać pętli histerezy materiału.

## 2. WPŁYW STOSUNKU PROMIENI RDZENIA NA POSTAĆ PĘTLI HISTEREZY

Pętlę histerezy materiału o idealnej prostokątności przedstawiono na rys. 1<sup>2</sup>. Pomiary pętli histerezy wykonuje się

$$S = \frac{B_{rem}}{B(H_m)}, \quad R = \frac{B \left( -\frac{H_m}{2} \right)}{B(H_m)}, \quad P = \frac{B_{r1}}{B(H_m)}.$$

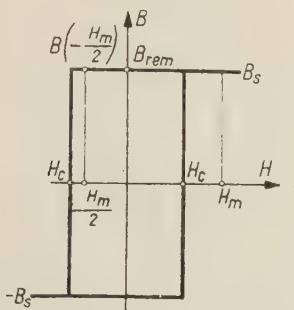
gdzie:

$B_{rem}$  → indukcja szcątkowa w rdzeniu po wyłączeniu pola  $H_m$ ,

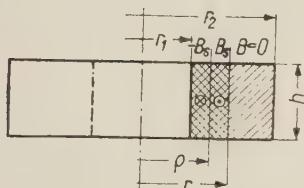
$B_{r1}$  → indukcja szcątkowa po dostatecznie wielokrotnym włączeniu i wyłączeniu pola  $-H_m/2$

<sup>1</sup> Przez  $B_s$  — wielkość zaznaczoną na rysunku — rozumieć się będzie w dalszym ciągu indukcję różnicową  $B_s = 4\pi J_s$ ;  $J$  jest natężeniem namagnesowania.

na rdzeniu pierścieniowym pokazany na rys. 2, a wyniki pomiarów odnoszą się do całego przekroju rdzenia, obliczając odpowiednie średnie wartości natężenia pola i indukcji magnetycznej.



Rys. 1



- Dodatni kierunek linii indukcji
- Ujemny kierunek linii indukcji

Rys. 2

Przy danych amperozwojach magnesujących iż natężenie pola magnetycznego w promieniu  $r$  od osi rdzenia wynosi

$$H(r) = 0,2 \frac{iz}{r} . \quad (1)$$

Dla  $r_2 > r_1$  natężenie pola w przekroju nie jest więc stałe. Średnie natężenie pola w przekroju oblicza się na ogólnie jako średnią arytmetyczną natężeń odpowiadających promieniom  $r_1$  i  $r_2$ :

$$H = \frac{0,4 \, iz}{r_1 + r_2} . \quad (2)$$

Indukcja różnicowa w promieniu  $r$  od osi rdzenia wynosi 0, jeśli  $H(r) < H_c$  lub  $B_s$  dla  $H(r) > H_c$ .

Indukcję średnią w przekroju rdzenia określa się ze wzoru

$$B = \frac{\Phi}{(r_2 - r_1)h}, \quad (3)$$

w którym  $\Phi$  oznacza całkowity strumień magnetyczny w rdzeniu pomierzony na przykład galwanometrem balistycznym.

Zmianę postaci pętli histerezy zachodzącą, gdy

$$\frac{r_2}{r_1} = a > 1,$$

oblicza się w sposób elementarny jak następuje.

Zakłada się, że równanie wypadkowej pętli ma być określone parametrami materiałowymi  $B_s$  i  $H_c$  oraz rozmiarami rdzenia  $r_1$ ,  $r_2$ .

Założmy, że w stanie początkowym rdzeń będzie nasycony w promieniu  $r$  od osi symetrii dzięki włączeniu pola magnesującego  $H_m$  o odpowiedniej wartości. Całkowity strumień w rdzeniu będzie wtedy

$$\Phi_m = (r - r_s) h B_s. \quad (4)$$

Gdy pole magnesujące będzie maleać od wartości  $H_m$  do 0, strumień nie ulegnie zmianie i będzie

$$\Phi_{\text{rem}} = \Phi_{\text{in}} = \text{const.}$$

Gdy teraz zacznie wzrastać bezwzględna wartość pola magnesującego o kierunku przeciwnym, to przy  $H(\varrho) = H_c$  nastąpi w promieniu  $\varrho$  od osi rdzenia ( $\varrho < r$ ) przemagnesowanie z wartości indukcji  $+B_s$  na  $-B_s$ . Całkowity strumień w namagnesowanej części przekroju rdzenia mieć będzie teraz dwie składowe: dodatnią dla promieni większych od  $\varrho$  a mniejszych od  $r$  i ujemną dla promieni mniejszych od  $\varrho$  a większych od  $r_1$ :

$$\Phi_{r-\varrho} = (r-\varrho)hB_s \quad (5)$$

Wypadkowy strumień obu składowych jest

$$\Phi = (r + r_i - 2\sigma) h B_+ . \quad (6)$$

Indukcja średnia dla całego przekroju rdzenia wyniesie na podstawie (3) i (6)

$$B = \frac{(r+r_1-2\varrho)}{r_2-r_1} B_s, \quad (7)$$

a maksymalna wartość indukcji średniej odpowiadająca polu  $H_m$

$$B_m = \frac{r-r_1}{r_2-r_1} B_s. \quad (8)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\frac{B_m}{B_s} = b,$$

które można nazwać współczynnikiem stopnia namagnesowania, otrzymuje się z przekształcenia równania (8) wyrażenie na  $r$ , mianowicie

$$r = b(r_2 - r_1) + r_1. \quad (9)$$

Dla amperozwojów, którym w promieniu  $\varrho$  od osi rdzenia odpowiada natężenie pola  $H_c$ , otrzymuje się z (1)

$$iz = \frac{H_c \varrho}{0,2}. \quad (10)$$

Równocześnie z równania (2)

$$iz = H \frac{r_1 + r_2}{0,4}. \quad (11)$$

Porównanie (10) i (11) daje

$$\varrho = \frac{r_1 + r_2}{2} \frac{H}{H_c}. \quad (12)$$

Po podstawieniu wyrażeń (9) i (12) do (7) równanie krzywej odmagnesowania  $B = \varphi(H)$  przybiera postać

$$B = B_s \left[ \frac{r_1(2-b)+br_2}{r_2-r_1} - \frac{r_1+r_2}{r_2-r_1} \frac{H}{H_c} \right] \quad (13)$$

lub

$$\frac{B}{B_m} = \frac{2-b+ba}{b(a-1)} - \frac{a+1}{b(a-1)} \frac{H}{H_c}. \quad (14)$$

Dla przypadku całkowitego namagnesowania rdzenia w stanie wyjściowym ( $b=1$ ) równanie krzywej odmagnesowania upraszcza się do następującego

$$\frac{B}{B_s} = \frac{a+1}{a-1} \left( 1 - \frac{H}{H_c} \right). \quad (15)$$

Równanie (14) jest słusne dla zakresu pól magnetycznych, w którym

$$-1 < \frac{B}{B_m} < +1.$$

Odpowiednimi granicznymi wartościami średniego natężenia pola magnesującego będą

$$H_1 \text{ gdy } \frac{B}{B_m} = +1,$$

$$H_2 \text{ gdy } \frac{B}{B_m} = -1.$$

Z podstawienia granicznych wartości  $\frac{B}{B_m}$  do równania (14) wynikają wyrażenia na odpowiednie graniczne wartości natężenia pola, mianowicie:

$$H_1 = \frac{2}{a+1} H_c, \quad (16)$$

$$H_2 = \frac{2[b(a-1)+1]}{a+1} H_c. \quad (17)$$

Dla  $a \rightarrow \infty$   $H_1 \rightarrow 0$ ,  $H_2 \rightarrow 2bH_c$ .

Dla  $a \rightarrow 1$  równocześnie  $b$  dąży do jedności i w wyniku

$$H_1 \rightarrow H_c, \quad H_2 \rightarrow H_c.$$

Jak widać, wartość  $H_1$  nie zależy od stopnia namagnesowania rdzenia, natomiast  $H_2$  rośnie wraz z  $b$  do wartości

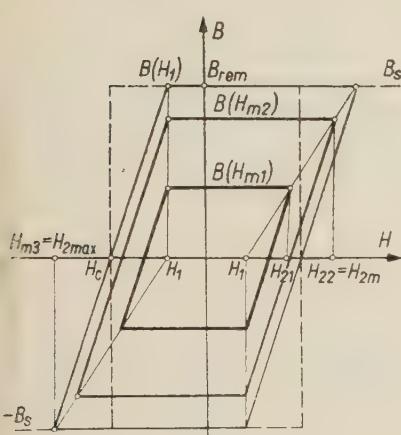
$$H_{2\max} = \frac{2a}{a+1} H_c \text{ (przy } b=1\text{)}. \quad (18)$$

Wynika stąd, że każdej wartości  $H_m$ , mniejszej od  $\frac{2a}{a+1} H_c$  odpowiada określona pętla histerezy różna dla różnych  $b$ . Otrzymuje się więc rodzinę pętli, z których największe pole obejmuje pętlę nasyżenia odpowiadającą wartości  $b=1$ . Każda pętla jest równoległobokiem o wierzchołkach wyznaczonych przez wartości  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $-H_1$ ,  $-H_2$ , co pokazano na rys. 3. Wyrażenie na średnie na-

teżenie powściągające pętli otrzymuje się z równania (14), kładąc  $\frac{B}{B_m} = 0$

$$H_{c'} = \frac{2-b+ba}{a+1} H_c.$$

Dla  $b=1$ ,  $H_{c'}=H_c$ .



Rys. 3

Nachylenie bocznych ramion pętli nie zależy od wartości  $b$ , co widać z równania (13). Nachylenie to można oznaczyć

$$\mu = -\frac{a+1}{a-1} \frac{B_s}{H_c}. \quad (20)$$

Dla  $r_2/r_1=a \rightarrow 1$   $\mu \rightarrow -\infty$

Dla  $r_2/r_1=a \rightarrow \infty$   $\mu \rightarrow -\frac{B_s}{H_c}$ .

Wzrost stosunku promieni rdzenia pierścieniowego wpływa zatem na zmniejszenie nachylenia pętli. Idealną pętlę histerezy, jaką zgodnie z założeniem charakteryzuje się materiał, otrzymać można jedynie dla rdzenia nieskończenie cienkiego  $r_2 \rightarrow r_1$ .

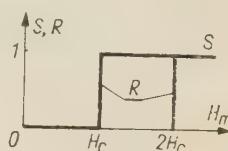
### 3. AMPLITUADOWE CHARAKTERYSTYKI PROSTOKĄTNOŚCI

#### Charakterystyki prostokątności

$$S = \varphi_1(H_m)$$

$$R = \varphi_2(H_m)$$

przedstawia dla materiału o pętli idealnie prostokątnej rys. 4. Postać rdzenia



Rys. 4

o  $r_2/r_1 > 1$  nie wpływa na przebiegi  $S = \varphi_1(H)$ , ponieważ  $H_1$  nie zależy od  $b$  i dopiero dla  $a \rightarrow \infty H_1 \rightarrow 0$ . Wartość remanencji jest więc równa  $B_m$  (lub  $B_s$  przy  $b=1$ ) i w zastosowaniach, w których istotna jest tylko wartość  $S$ , można wykorzystywać rdzenie o dowolnym stosunku promieni.

Przebieg charakterystyki  $R$  w funkcji natężenia pola magnesującego pokrywa się z pułapem przebiegu charakterystyki materiałowej ( $R=1$ ) pod warunkiem, że

$$H_1 < H_m < 2H_1.$$

Dla  $H_m > 2H_1$  wartość  $R$  będzie mniejsza od 1.

Gdy  $b < 1$ , wówczas dla danej wartości  $b$  będzie

$$H_m = H_2 = \frac{2[b(a-1)+1]}{a+1} H_c.$$

Graniczną wartość  $a$ , dla której jeszcze  $R=1$ , wyznaczyć można z równości

$$H_2 = 2H_1, \quad (21)$$

podstawiając za  $H_2$  i  $H_1$  wyrażenia (17) i (16). Otrzymuje się wtedy

$$a_{gr} = 1 + \frac{1}{b}. \quad (22)$$

<sup>3</sup> Znak minus wynika tu z założonego kierunku obiegu pętli histerezy przy nieuwzględnieniu ujemnego znaku pola odmagnesowującego.

Jak widać, dopuszczalna wartość  $a$ , nie powodująca obniżenia wartości  $R$ , maleje ze wzrostem  $b$ . Dla  $b \rightarrow 1$ ,  $a_{gr} \rightarrow 2$ . Gdy  $b \leq 1$  i  $H_m \leq H_{2\max}$ , zależność  $R$  od  $a$  i  $b$  wynika z podstawienia wartości  $1/2 H_2$  do równania (14)

$$R = \frac{1}{b(a-1)}. \quad (23)$$

Uwzględniając zależność między  $b$  i  $H_2 = H_m$  (17) można napisać także

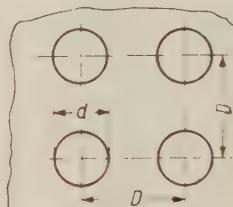
$$R = \frac{1}{(a+1) \frac{H_m}{2H_c} - 1}$$

$$(H_m \leq H_{2\max}).$$

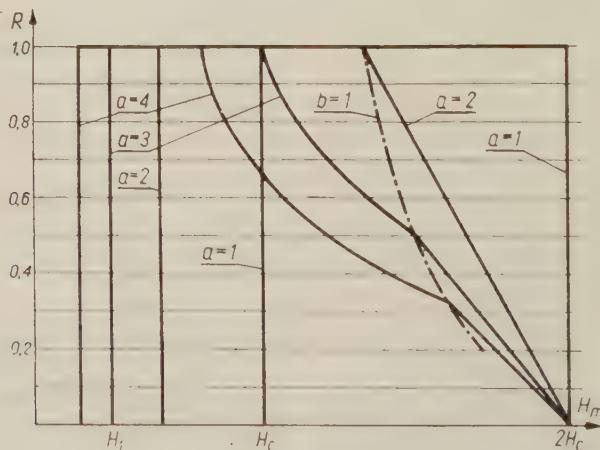
Gdy  $b=1$ , rosnące natężenie pola  $H_m$  przekracza wartość  $H_{2\max}$ ,  $R$  maleje liniowo do zera przy  $H_m = 2H_c$ , zgodnie z równaniami (14) i (15).

Przebiegi  $R = \varphi_2(H_m)$  dla różnych wartości  $a$  przedstawiono na rys. 5.

Jeśli więc osiągnięcie maksymalnie możliwej wartości  $R$  jest istotne, co ma miejsce na przykład w macierzowej pamięci o wybieraniu koencydencyjnym, należy stosować rdzenie pierścieniowe o  $a < 2$ . Jeśli jest to niemożliwe, trzeba zrezygnować z pełnego wykorzystania rdzenia i wówczas maksymalne amperozwoje magnesujące powinny być tak dobrane, aby natężenie pola w przekroju rdzenia było większe od  $H_c$  jedynie w promieniu  $r \leq 2r_1$  od osi rdzenia. Tak na przykład w płytce macierzowej Rajchmana [4], której fragment przedstawiono na rys. 6, musi być z zasady



Rys. 6



Rys. 5

Pełne wykorzystanie objętości rdzenia wymaga stosowania w praktyce wartości  $H_m > H_{2\max}$ , a więc powinno być zawsze  $b=1$  i punkt pracy rdzenia powinien leżeć na prawo od linii granicznej  $b=1$  pokazanej na rysunku.

$a = r_2/r_1 > 2$ . Wartość  $R_{\max}$  nie obniża się jednak, jeśli zastosuje się amperozwoje magnesujące, dla których  $H(r) = H_c$  przy  $r \leq 2r_1 = d$ . Stąd minimalna odległość środków sąsiednich otworów, przy której nie wystąpi zjawisko „prze-

słuchu", będzie:  $D=4r_1$  i otrzyma się warunek dla prawidłowego rozmieszczenia otworów w płytce

$$d/D \leq 0,5.$$

Warunek ten zapewnia równocześnie pełne wykorzystanie objętości materiału magnetycznego, gdy  $d/D=0,5$ .

#### 4. WNIOSKI

Z rozważań przedstawionych w punktach 2 i 3 wynikają następujące istotne wnioski praktyczne:

1. przy projektowaniu rdzeni pierścieniowych dla macierzowej pamięci koincydencyjnej należy stosować stosunek promieni:

$$r_2/r_1 < 2,$$

2. dla rdzeni przełącznikowych, gdzie istotna jest tylko wartość  $S_{\max}$ , można stosować także  $r_2/r_1 > 2$ ,

3. w płytce macierzowej Rajchmana stosunek średnicy otworu do odległości środków sąsiednich otworów nie powinien przekraczać wartości 0,5.

#### WYKAZ LITERATURY

1. Bragiński A. — Charakterystyki robocze krajowych ferrytów o prostokątnej pętli histerezy, Arch. Elektrot., T. 6, z. 2, s. 295, 1957.
2. Hermann P. K. — Die Form von Proben für Eisenmessungen II. ATM 257, 6, 133, 1957.
3. Kornetzki M. — Das Verhalten von Ferritkernen mit rechteckförmiger Magnetisierungsschleife im inhomogenen Magnetfeld und bei Scherung. Frequenz 9, 9, 306, 1955.
4. Rajchman J. A. — Ferrite apertured plate for random access memory. PIRE 45, 3, 325, 1957.

621.316.543:621.3.042.1:621.317.43

H. LACHOWICZ, J. MARKOWSKI, W. TUREWICZ

#### URZĄDZENIE DO POMIARU RDZENI PRZEŁĄCZNIKOWYCH O PROSTOKĄTNEJ PĘTLI HISTEREZY

Rękopis dostarczono 27. 6. 58

Podano wielkości charakteryzujące jakość materiału rdzenia, które można mierzyć za pomocą opisanej aparatury. Opisano metodę pomiaru tych wielkości. Podano schemat blokowy zasadniczych elementów układu oraz opisano zasadę działania każdego z nich.

#### ПРИСПОСОБЛЕНИЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ СЕРДЕЧНИКОВ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

##### Р е з ию м е

Даны величины характеризующие качество материала сердечника, которые могут быть измерямы при помощи описанной аппаратуры. Описан метод измерения этих величин. Дано блок-схема основных элементов системы и описан принцип действия каждого из этих элементов.

#### EQUIPMENT MEASURING MAGNETIC PROPERTIES OF SWITCH-CORES WITH RECTANGULAR HYSTERESIS LOOP

##### S u m m a r y

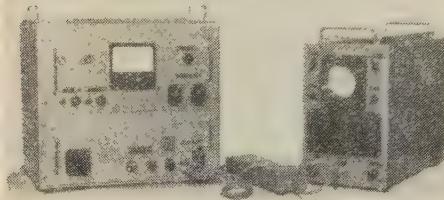
The parameters describing the quality of the magnetic material with the rectangular hysteresis loop are specified. Then the description of the methods used for the measurement of these parameters is given. The block diagram of essential circuit elements is shown and principles of operation are explained.

#### 1. PRZEZNACZENIE URZĄDZENIA

Urządzenie przeznaczone jest do pomiaru impulsowych parametrów rdzeni o prostokątnej pętli histerezy (głównie

rdzeni ferrytowych), parametrów interesujących głównie z punktu widzenia zastosowań rdzeni jako elementów prze-

łącznikowych [2]. Urządzenie przystosowane jest do współpracy z synchroskopem i łącznie z nim (rys. 1) pozwala na



Rys. 1

pomiar następujących wielkości charakteryzujących właściwości materiału rdzenia:

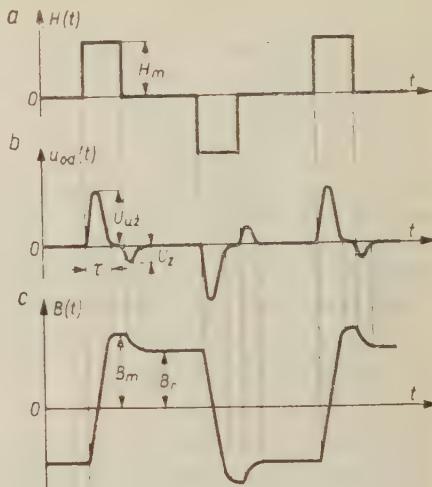
- a) czasu przełączania  $\tau$ ,
- b) współczynnika kształtu pętli histerozy rdzenia  $s$ ,
- c) stosunku amplitud napięcia użytecznego do zakłócającego  $U_{uz}/U_z$ ,
- d) wartości indukcji  $B_m$ .<sup>1</sup>

Pomiary wymienionych wielkości można dokonywać w funkcji zmian wartości natężenia pola magnetycznego, występującego w badanym rdzeniu.

## 2. ZASADA POMIARU

Badany rdzeń poddany jest periodycznemu działaniu impulsów natężenia pola magnetycznego o zmiennym kierunku. Kształt przebiegu magnesującego przedstawiono na rys. 2a. Uzyskiwany w tym przypadku przebieg napięcia odpowiedzi rdzenia  $u_{od}(t)$ , (rys. 2b), kierowany jest na synchroskop. Z obrazu przebiegu napięcia uzyskanego na jego ekranie określić można wartość czasu przełączania oraz stosunek amplitud napięcia użytecznego do zakłócającego. Całkując za pomocą układu elektrycznego przebieg  $u_{od}(t)$ , uzyskuje się przebieg napięcia proporcjonalny do zmian indukcji w rdzeniu  $B(t)$  (rys. 2c). Obraz tego przebiegu uzyskany na ekranie synchrosko-

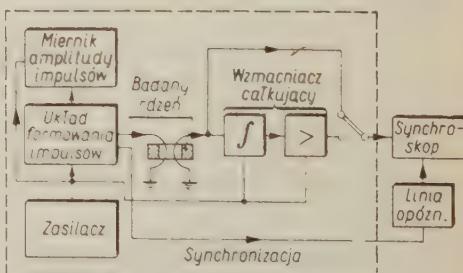
pu pozwala na określenie pozostałych wymienionych w p. 1 wielkości charakteryzujących rdzeń.



Rys. 2

## 3. OPIS URZĄDZENIA

Urządzenie składa się z trzech zasadniczych elementów: układu formowania magnesujących impulsów prądu o zmiennym kierunku, całkującego wzmacniacza odpowiedzi oraz współpracującego synchroskopu. Pozostałe elementy wyposaża-



Rys. 3

żenia urządzenia stanowi zasilacz dostarczający potrzebnych dla pracy układu napięć oraz miernik amplitudy wytwarzanych impulsów prądu. Schemat blokowy urządzenia przedstawiony jest na rys. 3. Pod względem konstrukcyjnym

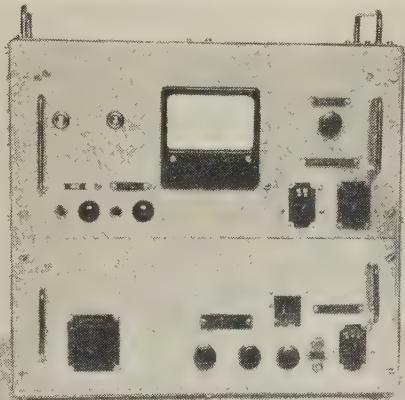
<sup>1</sup> Definicje mierzonych wielkości podane są w pracach [1] i [3].

urządzenie wykonane zostało w postaci dwóch niezależnych przyrządów jakie stanowią synchroskop oraz zasadniczy układ pomiarowy, zawierający pozostałe elementy urządzenia. Rys. 4 i 5 przedstawiają płyty czołowe tych przyrządów. Dodatkowym, pomocniczym elementem

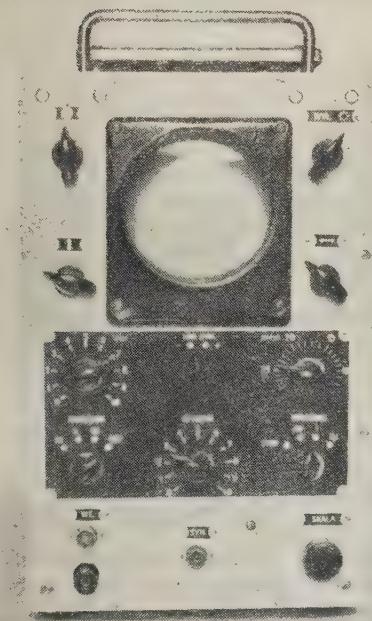
koniecznym dla właściwej pracy urządzenia jest wykonana linia opóźniająca, wprowadzająca opóźnienie sygnału synchronizującego w stosunku do sygnału badanego. Wtrącenie linii w tor synchronizacji (widoczne na rys. 1) konieczne jest dla uzyskania obrazu na zakresie najszybszej podstawy czasu synchroskopu. Wprowadzenie linii nie byłoby potrzebne, gdyby synchroskop posiadał własny układ opóźniający badany sygnał w stosunku do przebiegu synchronizującego.

### 3.1. Układ formowania magnesujących impulsów prądu.

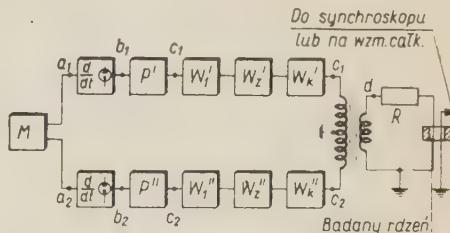
Schemat blokowy układu przedstawiono na rys. 6, na rys. 7 pokazano nato-



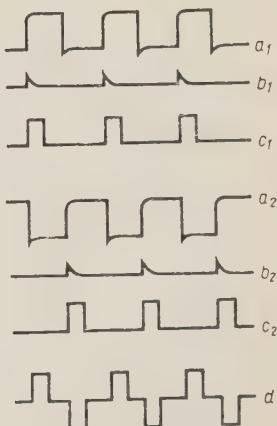
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

miast przebiegi napięciowe występujące w określonych na schemacie punktach układu. Pierwszy człon układu (symbol  $M$  na schemacie) stanowi samobieżny

multiwibrator zbudowany na podwójnej triodzie 6J6. Narzuca on częstotliwość powtarzania wytwarzanych w układzie impulsów, która wynosi  $f_p = 10 \text{ kHz}$ . Odpowiednio uformowane przebiegi z obydwu anod multiwibratora wyzwalają dwa przerzutniki jednostanowe  $P'$  i  $P''$  zbudowane również na lampach 6J6. Uzyskane na wyjściu przerzutników impulsy mają zatem częstotliwość powtarzania narzuconą przez multiwibrator i są wzajemnie przesunięte o pół okresu jego drgań. Szerokość generowanych impulsów jest jednakowa w obydwu przerzutnikach i regulowana jest jednocześnie poprzez zmianę początkowego napięcia siatek w granicach  $2 \div 8 \mu\text{sek}$ . Następne dwa stopnie, zbudowane na lampach EF 80 ( $W'_1$  i  $W''_1$ ) i EL 84 ( $W'_2$  i  $W''_2$ ) pozwalają na odpowiednie ukształtowanie generowanych przez przerzutniki impulsów oraz uzyskanie odpowiedniej ich amplitudy i fazy, koniecznej dla wzbudzenia stopni końcowych.

Stopnie końcowe układu  $W'_k$  i  $W''_k$  zbudowane są na lampach EL 81 i pracują przeciwsobnie, po dwie połączone równolegle, na wspólny transformator wyjściowy. Uzwojenie transformatora nawinięto na rdzeniu ferrytowym z materiału Ferroxyd 801<sup>2</sup>. Przekładnia obniżająca  $n=10$ . Obciążenie transformatora stanowi oporność  $R=5 \Omega$  oraz połączona z nią w szereg oporność jaką reprezentuje badany rdzeń. Oporność  $R$  dobrano tak, aby przypuszczalne zmiany oporności reprezentowanej przez badane rdzenie nie wywoływały zmian amplitudy impulsów prądu większych od 10%. Uzwojenie badanego rdzenia wykonane jest w postaci dwóch wzajemnie odizolowanych, koncentrycznie względem siebie umieszczonych igieł o całkowitej zewnętrznej średnicy 1,3 mm. Obwód magnesowania rdzenia, jak i też obwód odczytu zamknięte są poprzez ruchome styki pozwalające na wymianę badanego rdzenia.

Regulacja amplitudy magnesujących impulsów prądu realizowana jest poprzez jednoczesną zmianę początkowego napięcia siatek lamp końcowych.

### 3.2 Wzmacniacz całkujący.

Napięcie odpowiedzi rdzenia kierowane jest bądź bezpośrednio na wejście synchroskopu, bądź poprzez trzystopniowy wzmacniacz całkujący (patrz rys. 3) zbudowany na lampach EF 80. Stopień pierwszy stanowi integrator pracujący w układzie Millera o stałej czasu  $RC = 5 \text{ msec}$ . Pozostałe dwa stopnie zapewniają dostateczne do obserwacji na synchroskopie wzmacnienie przebiegu napięcia uzyskanego po scałkowaniu napięcia odpowiedzi rdzenia. Wzmocnienie tych stopni wynosi  $k_u = 300 \text{ V/V}$ . Lampy wzmacniacza żarzone są prądem stałym, co pozwala na znaczne zmniejszenie zakłóceń sieci. W tym też celu wzmacniacz ma przenoszone pasmo częstotliwości ograniczone od dołu poprzez dostatecznie małe stałe czasu układów sprzęgających stopnie.

### 3.3 Miernik amplitudy impulsów.

Miernik ten jest wykonany jako miernik wartości szczytowej w układzie detekcji równoległej na lampie EA 50. Wyprostowane napięcie wzmacniane jest w konwencjonalnym układzie wzmacniacza symetrycznego na podwójnej triodzie ECC 40. Napięcie na detektor dostarczane jest z oporności włączonych w katody lamp końcowych. Napięcie to jest jeszcze wzmacniane przed detektorem przez pojedynczy stopień na lampie 6AK5, co pozwala na uzyskanie większej liniowości detekcji, a przez to i wskazań miernika. Przełącznik umieszczony przed tym stopniem pozwala na wybór impulsów jednej polaryzacji. Miernik posiada dwa zakresy 1 i 5 A.

## 3.4. Zasilacz.

Zasilacz dostarcza stabilizowanego elektronowo napięcia anodowego 225 V, 450 mA, ujemnego napięcia — 105 V stabilizowanego jonowo oraz napięć zasilania dla wszystkich lamp układu.

## 3.5. Synchroskop.

Ekran synchroskopu zaopatrzony jest w skalę (siatkę prostokątną) milimetrową, która pozwala na odczytanie wymiarów obrazu. W przyrządzie zastosowano cechowany wzmacniacz pionowy oraz cechowaną podstawę czasu. Wzmacniacz pionowy ma regulowaną czułość w zakresie 0—10 cm/V. Odpowiednie skale pozwalają na odczytanie czułości dla dowolnego położenia pokręteł regulacyjnych z dokładnością około 10%. Znając czułość wzmacniacza i wymiary obrazu można określić wielkość napięcia przyłożonego do wejścia synchroskopu. Czas trwania badanego przebiegu określa się z wymiarów odczytyanych z ekranu (w kierunku poziomym) oraz z ustawienia skal pokręteł regulacyjnych szybkości biegu plamki.

## 3.6. Linia opóźniająca.

Przebieg napięciowy synchronizujący generator podstawy czasu synchroskopu pobierany jest z oporności R w obwodzie magnesowania rdzenia (rys. 6). Wymagane opóźnienie sygnału badanego względem przebiegu synchronizacji jest rzędu kilku μsek. Uzyskanie tak dużego nieznieształczonego opóźnienia sygnału wymagałoby zastosowania przewodu koncentrycznego o znacznej długości. Z tego też względu przyjęto rozwiązanie, w którym opóźniany jest przebieg synchronizujący o czas krótszy o kilka μsek od czasu powtarzania impulsów magnesujących.

Przy tym rozwiązaniu zniekształcenia wprowadzane przez linię są nieistotne, co pozwala na jej wykonanie w postaci linii o stałych skupionych. Wykonana linia posiada 13 sekcji typu  $\pi$  i wprowadza opóźnienie  $t_0 = 45 \pm 3 \mu\text{sek}$ . Regulacja opóźnienia jest płynna i dokonuje się przez zmianę indukcyjności poszczególnych sekcji (regulacja rdzeniami ferrytowymi). Pod względem konstrukcyjnym linia wykonana jest jako odrębny element.

## 4. DANE TECHNICZNE URZĄDZENIA

## Wymiary badanych rdzeni

|                                |         |
|--------------------------------|---------|
| Minimalna średnica wewnętrzna  | 1,3 mm  |
| Maksymalna średnica zewnętrzna | 20,0 mm |
| Maksymalna wysokość            | 6,0 mm  |

## Impulsy magnesujące

|   |            |
|---|------------|
| Maksymalna amplituda                                      | 4,0 A      |
| Regulacja amplitudy ciągła w granicach                    | 0 ÷ 4 A    |
| Szerokość impulsów regulowana w sposób ciągły w granicach | 2 ÷ 8 μsek |
| Czas narastania czoła i opadania zbocza                   | 0,2 μsek   |
| Oscylacje   | < 5%       |
| Opadanie wierzchołka                                      | < 5%       |
| Częstotliwość powtarzania dla impulsów jednego kierunku   | 10 kHz     |

## Dokładność pomiaru amplitudy impulsów prądu

5%

## Synchronizacja współpracującego synchroskopu przebiegiem napięciowym proporcjonalnym do przebiegu impulsów prądu magnesującego.

|  |   |
|--|---|
| Wymagane pasmo współpracującego synchroskopu   | 3,5 MHz   |
| Zasilanie z sieci prądu jednofazowego  | 220 V; 50 Hz  |
| Całkowity pobór mocy urządzenia przy maksymalnej amplitudzie impulsu prądu magnesującego | ok. 400 VA  |
| Dane synchroskopu  |   |
| Wzmacniacz pionowy   |   |
| Maksymalna czułość   | 10 cm/V   |
| Regulacja czułości płynna  | 0÷10 cm/V   |
| Regulacja czułości skokowa   | $\times 1 \times 10^{-1} \times 10^{-2} \times 10^{-3}$ |
| Oporność wejściowa (1000 Hz)   | > 0,6 MΩ  |
| Pojemność wejściowa  | < 30 pF   |
| Pasmo 3 dB   | 100 Hz ÷ 3,5 MHz  |
| Charakterystyka aperiodyczna   |   |
| Podstawa czasu   |   |
| Regulacja szybkości plamki ciągła  | 8 ÷ 25 μs/cm  |
| Regulacja szybkości skokowa  | $\times 0,1 \times 1 \times 10$                         |
| Amplituda podstawy czasu stała   | ok. 1,2 średnicy ekranu                                 |
| Synchronizacja zewnętrzna regulowana   |   |
| Minimalne napięcia wyzwalające   | < 0,2 V   |
| Oporność wejściowa (1000 Hz) dla napięcia 1 V  | 10 kΩ   |
| Impulsy wyzwalające dodatnie i ujemne  | + i -   |
| Opóźnienie startu  | ok. 0,35 μsek   |
| Zasilanie z sieci prądu jednofazowego  | 220 V, 50 Hz  |
| Pobór mocy   | ok. 200 VA  |

## WYKAZ LITERATURY

1. Bragiński A. — Charakterystyki robocze krajowych ferrytów o prostokątnej pętli histerezy. Archiw. Elektrotechn. tom IV, zeszyt 2, rok 1957.
2. Wadas R. — Niektóre wyniki prac nad ferrytami o prostokątnej pętli histerezy. Archiw. Elektrotechn., tom VI, zeszyt 4, rok 1957.
3. Wijn H. P. I., van der Heide H. — Pulse response properties of rectangular loop Ferrotes. PIEEE T. 104, cz. B supl. Nr 7, 1957, str. 422.
4. Wylen J. — Pulse response characteristics of rectangular-hysteresis — loop ferromagnetic materials. Trans. of AIEE, cz. I, 1953, str. 648.

## KONFERENCJA NAUKOWA NA TEMAT PRZETWORNIKÓW ELEKTROAKUSTYCZNYCH W KRYNICY

Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk zorganizował w dniach 17—26 września 1958 r. w Krynicy symposium poświęcone przetwornikom elektroakustycznym. W symposium wzięło udział ok. 50 polskich pracowników nauki oraz 20 gości zagranicznych. W czasie symposium wygłoszono 54 referaty i komunikaty, które obejmowały problemy teoretyczne, technologiczne i konstrukcyjne, związane z budową i działaniem przetworników. Jak podkreślił w referacie inaugurującym konferencję prof. I. Malecki, głównym jej celem było ściślejsze powiązanie tych trzech grup problemów i wytyczenie zasadniczych kierunków prac badawczych na przyszłość.

Wśród zagadnień teoretycznych najwięcej uwagi poświęcono systematycznie układowi zastępczemu przetworników. W pracach J. Kacprowskiego i A. Lenka została konsekwentnie zastosowana do przetworników elektromechanicznych i elektroakustycznych teoria czwórników telekomunikacyjnych, natomiast Grigorjew zajął się sklasyfikowaniem nowych w praktyce jeszcze nie używanych przetworników. Schematy zastępcze przetworników w stanach nieustalonych analizowali L. Filipczyński, F. A. Fischer i J. Tabin, a parametry mechanicznych układów zastępczych głośników i mikrofonów w stanie ustalonym omawiali Z. Baráth i H. Jabłońska.

W związku z układami zastępczymi pozostała również praca L. Cremera o modelach mechanicznych układów akustycznych.

Dalsze prace teoretyczne dotyczyły impedancji akustycznych układów promieniujących (B. Wyrzykowska), zniekształceni intermodulacyjnych w głośnikach (J. Merhaut) i podstaw działania generatorów przepływowych (B. Leśniak).

Eksperymentalne badania promieniowania cylindra z tytanianu baru podał T. Tarnoczy.

Bogato były na konferencji reprezentowane zagadnienia technologiczne wytwarzania materiałów do budowy przetworników. Zajmowano się głównie tytanianem baru (A. A. Ananiewa, A. W. Sosnow, M. A. Ugriumowa) i ferrytami magnetostrykcyjnymi (I. P. Golamina, I. F. Szyszkin, A. Smoliński), były jednak również omawiane badania tradycyjnych stopów magnetostrykcyjnych (R. Suwalski) i technologia syntetycznych kryształów kwarcu (W. Pajewski).

W referatach tej grupy szczególną uwagę zwrócono na metodykę pomiarową badania właściwości materiałów z punktu widzenia ich przydatności do budowy przetworników (A. A. Ananiewa, I. P. Golamina, T. Krajewski) i ustalenia stałych mechanicznych tych materiałów (M. Grützmacher, A. Lenk, W. Pajewski), P. Gregus zwrócił uwagę na związek między zjawiskami luminescyjnymi i piezoelektrycznymi.

Najbardziej różnorodne były referaty dotyczące konstrukcji przetworników. Kilku autorów opisało konstrukcję głośników o zadanej charakterystyce kierunkowej lub częstotliwościowej (L. Keibs, W. Kołtoński) bądź mikrofonu eliminującego szумy otoczenia (C. Feik).

Inni pokazali nowe rozwiązanie syren i generatorów przepłybowych dla czynnych zastosowań ultradźwięków (B. Mączewski), (C. Wachtl). Zajmowano się także elementami sterującymi i promieniującymi echo-sond morskich (Z. Niegiełło, J. Skrzela).

Nowe układy przetworników akustycznych przedstawili W. S. Grigorjew, B. Klarner i S. Milosavljevic.

Osobną grupę stanowiły referaty poświęcone technice pomiarowej. Między

innymi omówiono specjalne typy przetworników przystosowanych do pomiarów wielkich ciśnień (M. Grützmacher), przyspieszeń (P. V. Brüel), konstrukcji stalowych (J. Kasiński), dokładnego po-

miaru rozkładu pola akustycznego w cieczach (J. Karpinski, J. Wehr).

Referaty wygłoszone na symposium wydane zostaną w postaci książki w języku polskim i angielskim.

## ERRATA

Zeszyt 3, tom VII, 1958

| Str | Wiersz     |         | Jest   | Powinno być  |
|-----|------------|---------|--|--|
|     | od dołu    | od góry |  |  |
| 361 | 5          |         | 0,6 A  | 6 A  |
| 371 | 16         |         | dow-voltage  | low-voltage  |
| 375 |            | 3       | $U_p = U_{st}(1 - e^{-\beta t})$                             | $U_p = U_{st}(1 - e^{-\beta t})$                               |
| 380 |            | 4       | w kierunku   | w iskierniku   |
| 383 |            | 4       | iskrowników  | iskierników  |
| 384 | 2          |         | 100 A - 10 ms  | 160 A - 10 ms  |
| 392 |            | 4       | od 17 do 400   | od 17 do 40  |
| 432 |            | 5       | $\int_0^{i_k}$   | $\int_0^{i_e}$   |
| 436 | wzór (30)  |         | $M$  | $M_{sr}$   |
| 485 | 11         |         | $+e \cdot (R_a^{-1} R_b)$                                    | $+e \cdot (R_a + R_b)$   |
| 487 | Rys. 4     |         | $k = 2,0$  | $k = 2,5$  |
| 491 |            | 9       | $W_A = \frac{(m \cdot n + n \cdot p + p)^2}{n}$              | $W_A = \frac{(m \cdot n + n + n \cdot p + p)^2}{n}$            |
| 497 |            | 4       | $R_a R_b$  | $R_a / R_b$  |
| 507 |            | 4       | $R_b$  | skreślić   |
| 508 | 20         |         | $R_e$  | $R_c$  |
| 520 | 3          |         | $\Delta T_{01} + \Delta T_{02}$                              | $-\Delta T_{01} \cdot \Delta T_{02}$                           |
| 521 |            | 3       | $\delta_{2AT} = 0 =$   | $\delta_{2AT=0} =$   |
| 525 | wzór 9     |         | $\frac{r_p}{u}$  | $\frac{i_p}{u}$  |
| 539 | 9          |         | $\sqrt{\frac{\beta}{S_3}}$                                   | $\sqrt{\frac{\beta_1}{S_3}}$                                   |
| 540 | wzór II. 3 |         | $\left[ (1 + \hat{p})^3 + \frac{\hat{p}}{a} + \dots \right]$ | $\left[ (1 + \hat{p})^3 + \frac{\hat{p}}{a^2} + \dots \right]$ |
| 542 | 22         |         | лучшие   | лучшие   |
| 543 | 9          |         | form the these   | form of these  |
| 545 |            | 10      | $M_a^k$  | $M_{ak}^k$   |
| 547 | 1          |         | $-\hat{S}_a$   | $\hat{S}_a$  |

| Str | Wiersz  |         | Jest  | Powinno być  |
|-----|---------|---------|---|--|
|     | od dołu | od góry |   |  |
| 548 | 2       |         | $i\omega$   | $j\omega$  |
| 549 | wzór 16 |         | $-Z_k - \frac{\hat{S}_a - \hat{Y}_{as} - \hat{Y}'_{as}}{ \mathbf{Y}_{ee'} }$  | $-Z_k + \frac{\hat{S}_a - \hat{Y}_{as} - \hat{Y}'_{as}}{ \mathbf{Y}_{ee'} }$ |
| 549 | wzór 18 |         | $\begin{bmatrix} \hat{Y}_{sk}^z + \hat{Y}_{as}^z - \hat{Y}_{as}^z \\ \hat{S}_a^z - \hat{Y}_{as}^z, \hat{Y}_{ak}^z + \hat{Y}_{as}^z \end{bmatrix}$ | $= [\hat{Y}_{ee'}] + [\hat{Y}_{ee'}]$  |
| 555 |         | 5       | $\hat{Y}_{sk}^2, \hat{Y}_{ak}^2, \hat{Y}_{as}^2$  | $\hat{Y}_{sk}^z, \hat{Y}_{ak}^z, \hat{Y}_{as}^z$                             |
| 555 | 7       |         | $\hat{Y}_{sk}^2, \hat{Y}_{ak}^2, \hat{Y}_{as}^2$  | $\hat{Y}_{sk}^z, \hat{Y}_{ak}^z, \hat{Y}_{as}^z$                             |

## WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednocośnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w innym języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnich arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń, jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnich arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

**U w a g a:** Autora obowiązuje korekta autorska, która należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki”, Warszawa, Kościelna 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04, Redakcja czynna w poniedziałki, środy i piątki

## ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena w prenumeracie zł 120,— rocznie, zł 60,— półrocznie.  
Zamówienia i wpłaty przyjmują:

1. Przedsiębiorstwo Upowszechnienia Prasy i Książki „RUCH”, Poznań, ul. Zwierzyniecka 9, Konto PKO nr 122-6-211.831;

2. Urzędy pocztowe.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę 40% drożej. Zamówienia dla zagranicy przyjmuje Przedsiębiorstwo Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „RUCH”, Warszawa, ul. Wilcza 46. Konto PKO nr I-6-100.024.

Bieżące numery do nabycia w księgarniach naukowych „Domu Książki” i we Wzorcowni PWN, Warszawa, ul. Miodowa 10.

Informacji w sprawie sprzedaży egzemplarzy z poprzednich lat udziela Centrala Kolportażu „RUCH”, Sprzedaż Prasy Zdeaktualizowanej, Warszawa, ul. Srebrna 12, oraz Wzorcownia PWN, Warszawa, ul. Miodowa 10.